ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 26 FÉVRIER 1906,

PRÉSIDENCE DE M. H. POINCARÉ.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ARCHÉOLOGIE. — *Recherches sur quelques métaux et minerais trouvés dans les fouilles du Tell de l'Acropole de Suse, en Perse;* par MM. **Berthelot** et **G. André**.

M. de Morgan nous a priés d'examiner divers objets métalliques et minéraux provenant de ses fouilles en Perse, dans la partie de Suse désignée sous le nom de *Tell de l'Acropole*. Cet acropole a été successivement occupé par les Élamites, les Achéménides, les Parthes, les Sassanides et les Arabes. Les objets qui nous ont été remis proviennent surtout des couches profondes de l'époque Élamite (antérieure à 750 av. J.-C.), sans que leur origine toutefois puisse être absolument garantie. Plusieurs ont été trouvés dans les ruines du temple du dieu Susinak (xe siècle avant notre ère) et l'un d'eux porte une inscription au nom d'un roi Silhak (entre 1000 et 750 av. J.-C.).

Voici le résumé des résultats de nos analyses. On remarquera particulièrement l'existence du nickel, accompagnant le cuivre dans un certain nombre de ces objets : il paraît avoir été fourni par un minéral mixte, ou par un mélange de minerais, tel que des pyrites mixtes, où le cuivre était associé à une certaine proportion de nickel. Nous n'avions rencontré jusqu'ici aucune proportion de ce métal dans les analyses que nous avons faites d'objets provenant de l'Égypte et de la Chaldée. Il y aurait lieu d'en rechercher l'origine dans les montagnes des environs de Suse.

I. — Objets d'argent.

Fragment d'un vase en argent brisé et fortement altéré par sa transformation en chlorure, qui l'a désagrégé. La forme en était circulaire, indiquée par deux rainures de la partie supérieure d'un fragment, correspondant sur cette partie à un diamètre de 4^{cm} à 5^{cm} vers l'ouverture du vase. La face intérieure a conservé son poli, en prenant une teinte noir violacé très foncée. Un autre fragment semble répondre à une partie plus basse, telle que la gorge d'un gobelet de forme conique.

Ces fragments s'écrasent facilement; mais ils se pulvérisent moins bien, en fournissant une poudre gris foncé, insoluble dans l'eau. Partie principale : chlorure d'argent.

La matière est peu homogène.

Éléments trouvés : argent, chlore, sable, or, cuivre, fer, chaux, eau.

Ni arsenic, ni acide carbonique.

Analyse d'un échantillon.

	Sur 100 parties.	
Chlore	16,98	16,72
Or	1,12	
Argent total	65,27	64,14
Cuivre	2,94	
Sable	1,44	

D'après cette analyse, il restait une certaine dose d'argent excédant celle du chlorure normal AgCl, lequel répondrait aux rapports 64,8 : 21,2.

Mais cet argent doit être considéré plutôt comme constituant le sous-chlorure connu Ag^2Cl.

Ce chlorure résulte de l'action des eaux saumâtres sur l'alliage primitif.

La dose de cuivre représenterait à peu près un cinquième du poids de l'argent et même un peu davantage, une portion du chlore étant combinée au cuivre.

La dose du cuivre a été trouvée un peu moindre dans une portion entourée de patine; sans doute à cause de l'altération plus rapide du cuivre.

On remarquera l'existence d'or notable, associé à l'argent; il correspond sans doute à l'emploi d'un minerai aurifère et à une époque antérieure au VIe siècle avant J.-C., époque où l'on ne savait pas bien séparer l'or de l'argent.

II. — Objets de cuivre et de bronze.

1. Calotte de bronze en forme de cloche, formée par un des montants d'un battant de porte, avec inscription au nom du roi Silhak.

Forme générale : moitié d'un ellipsoïde allongé; hauteur 315^{mm}; profondeur 285^{mm}; diamètre extérieur à l'orifice 210^{mm}; épaisseur irrégulière 22^{mm} à 15^{mm}; poids $16^{kg},7$.

Calotte préparée par le moulage grossier d'un alliage fondu.

Matière partiellement oxydée, très dure et fragile.

Éléments trouvés : étain, cuivre.

Éléments absents : plomb, zinc, arsenic.

Analyse.

	Pour 100.	
Étain	11,85	
Cuivre	85,20	85,56
	97,05	
Oxygène et divers	2,95	
	100,00	

2. — Fragment de tombeau en bronze de l'époque achéménide.

Matière verdâtre, peu homogène à la coupe; cassante, mais difficile à pulvériser; contient des grains métalliques; coupure verte.

Elle renferme une substance organique.

Éléments trouvés : carbone, azote, eau, CO^2, chlore, sable, étain, cuivre, fer, plomb, chaux.

Éléments absents : arsenic, argent, zinc.

Traces de magnésie.

D'après l'analyse, la partie métallique était constituée par un bronze formé de :

Cuivre	82,7
Étain	13,9
Plomb	3,4
	100,0

C'est donc un bronze mixte, riche en étain et contenant du plomb.

Ce métal a été recouvert d'une peinture, probablement bitumineuse et

telle que la matière brute analysée renfermait en plus 2,14 centièmes de carbone organique. Ce bronze s'est trouvé d'ailleurs en contact avec du sable, du carbonate de chaux et des eaux saumâtres, qui ont formé avec la matière organique et les métaux une patine chlorurée.

3. — Fragment d'un vase ou coffret provenant d'un dolmen de $7^m,20$. Vadjalik.

Fragments informes de feuillets métalliques cassés. Couleur rouge, métal oxydé à la surface. Épaisseur $0^{mm},55$ à $0^{mm},45$ suivant la patine. La légère courbure d'un fragment est le seul indice d'une forme régulière.

Assez résistant; coupure métallique; forte patine.

Éléments trouvés : cuivre, étain, fer.

Éléments absents : arsenic, plomb, argent, zinc.

Traces de nickel, de silice, de chaux.

Analyse.

Étain	8,45	8,60
Cuivre	89,46	
Fer	0,53	
	98,44	
Divers	1,56	

C'est un bronze, dans lequel le rapport du cuivre à l'étain est à peu près normal. La présence d'un peu de fer est à remarquer.

4. — Fragment métallique provenant des fouilles de Suse.

Analyse.

	Pour 100.	
Cuivre	67,79	67,59
Oxyde de nickel	2,30	2,43
Oxyde de fer	2,59	
Chlore	9,36	
Silice	4,21	
	86,25	
Oxygène et divers	13,75	

L'alliage primitif a été attaqué lentement par des eaux saumâtres. Il est remarquable par la proportion de nickel et de fer qu'il renferme.

5. — Fragments de vases de bronze et de plaques de bronze
(Fouilles du temple de In Susinak).

Fragments informes de grande dimension d'une plaque circulaire de 7^{cm} à 8^{cm} de rayon et d'un objet circulaire incurvé en creux, plus épais de 7^{mm} à 8^{mm} au cordon et plus bas de 2^{mm}. Patine épaisse. Quelques petits fragments cannelés.

Pulvérisation facile. Matière fortement oxydée.

Éléments trouvés : cuivre, plomb, étain, chlore, eau.

Éléments absents : argent, zinc, arsenic, acide carbonique.

Traces de nickel, de fer et de chaux.

Analyse.

	I.	II.
Étain	19,80	18,97
Cuivre	52,27	51,83
Plomb	7,04	7,37
Chlore	1,39	
Oxyde de fer	0,46	
	80,96	
Oxygène et eau, etc	19,04	
	100,00	

C'est un bronze très riche en étain et contenant du plomb.

6. — Objets de cuivre provenant des fouilles de Suse.

Leur composition varie depuis le cuivre sensiblement pur (oxydé à la surface) représenté par *a*, *b*, *c*, *d*, et des bronzes divers :

(*a*). Fil de bronze, provenant du temple de In Susinak.
Clous provenant du temple de In Susinak.

(*b*). Cuivre presque pur. — (*c*). De même, sans étain.

(*d*). Bronze riche en étain :

Cu	77,2
Sn	16,1
Patine oxygénée	6,7

(*e*). 3 anneaux, l'un constitué par du fer, avec petite quantité de cuivre, un autre par du cuivre à peu près pur, un troisième renfermant :

Cu	89,8
Sn	5,7
Fe	0,9
Ni	trace

(*f*). Petite pelle à manche plein :

Cu	98,7
Sn	0,3
Ni	0,3
Fe	0,2

C'est du cuivre presque pur, mais associé avec un peu d'étain et de nickel.

(*g*). Le cuivre forme aussi presque exclusivement : un objet semblable à une mèche de vilebrequin; et une tige métallique.

(*h*). Pied de statuette (?) brisé :

Cu	98,6
Sn	1,0
Fe	0,3
Ni	traces

(*i*). Lame irrégulière :

Cu	74,5
Sn	10,3
Fe	0,15
Ni	traces

On voit que les proportions relatives du cuivre et de l'étain varient extrêmement, comme si la formule régulière du bronze n'avait été encore fixée pour les plus anciens de ces objets.

7. — Pointe de javelot.

Forme extérieure conique, avec cavité intérieure de même forme.

Longueur	50^{mm}
Diamètre de la tranche supérieure	13^{mm}
Épaisseur ε	$3^{mm},1$ à $3^{mm},8$
Poids	$16^{g},5$

Surface rugueuse, métal oxydé incomplètement; 3 rainures ou fentes peu symétriques, allant presque jusqu'à l'extrémité.

Patine de teinte grise, cassure oxydée terne (friable).

Analyse.

Sn	11,4
Cu	67,3
Fe	traces

L'existence d'une pointe d'arme en cuivre dénote une époque ancienne; le fer n'ayant pas tardé à remplacer le cuivre dans la fabrication des armes dans les temps historiques proprement dits.

D'après son aspect, cette pointe semble avoir été fabriquée en tordant violemment une lame de 3^{mm} à 4^{mm} d'épaisseur. La torsion a eu pour effet de développer 3 fissures de la base au sommet, convergeant vers le même point que la jonction des deux extrémités de la lame tordue.

Cette pointe de javelot n'a donc pas été fabriquée par moulage, mais par la torsion d'une lame de bronze; ce qui semble représenter une grande antiquité, la pratique du moulage ayant dû se répandre de bonne heure.

III. — OBJETS DE PLOMB.

1. Cuboïde métallique : trois dimensions, 25^{mm}; 23^{mm}; 20^{mm}; arêtes mousses.

Au centre d'une des six faces, enfoncement circulaire (trace de support?)

PLOMB pur industriellement.

2. LITHARGE FONDUE avec de la craie et un peu de sable.

Prisme de couleur ocreuse, très lourd. Matière facile à pulvériser, à cassure conchoïdale. Soluble, avec faible résidu, dans l'acide nitrique faible.

Analyse.

		Pour 100.
Plomb	74,68	74,29
Silice	2,35	2,67
Oxyde de fer	1,27	0,98
Chaux	2,89	3,12
Chlore	1,96	
CO^2	4,99	
Eau	1,31 (à 110°)	
Magnésie	0,51	
	89,96	
Oxygène et divers	10,04	

3. Silicate de plomb, de cuivre et de fer. — Très lourd, aspect gris et verdâtre sur quelques points; cassure d'un gris bleu, pulvérisation facile, poudre grise. Se dissout incomplètement dans l'acide nitrique; fond par la chaleur en une substance bleu foncé à chaud.

Analyse.

	Pour 100.
Cuivre	7,36
Plomb	55,37
Silice	12,03
Chaux	4,77
CO^2	3,91
Eau	1,51
Oxyde de fer	4,26
Chlore	1,08
	90,29

Les numéros 2 et 3 se rapportaient à quelque fabrication industrielle, peut-être céramique.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Propagation du mouvement autour d'un centre dans un milieu élastique, homogène et isotrope : étude de l'onde corrélative aux variations de densité.* Note de M. J. Boussinesq.

I. Depuis le célèbre Mémoire de Poisson, du 11 octobre 1830, *Sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques* (*Mémoires de l'Académie*, t. X), tous les physiciens géomètres savent qu'une rupture instantanée quelconque de l'équilibre, produite au sein d'un milieu élastique et isotrope indéfini, dans une sphère d'un petit rayon ε, dite *région d'ébranlement*, donne naissance à deux ondes sphériques, ayant leur centre commun au centre de cette région, comme épaisseur son diamètre 2ε, enfin, comme rayon moyen, uniformément croissant, le produit, par le temps écoulé t, d'une vitesse de propagation A ou a, propre à chacune des deux ondes et fonction des propriétés mécaniques du milieu. Dans la première de ces ondes, à vitesse A, les petits déplacements ξ, η, ζ des particules élastiques se font sans rotations moyennes, mais avec *dilatations* (ou contractions) *cubiques* θ; dans l'autre, au contraire, à vitesse a, ils ont lieu avec rotations moyennes, mais sans changement de la densité. Aux distances R du centre (choisi comme origine des coordonnées) très grandes par rapport

à ε, et le long d'un même rayon vecteur émané de l'origine, les déplacements ξ, η, ζ égalent, dans les deux ondes, les quotients de certaines fonctions finies de $At - R$ ou de $at - R$ par ces distances R; mais, tandis qu'ils sont, dans la première, *longitudinaux*, ou à résultante dirigée suivant le rayon vecteur, comme on le savait depuis longtemps pour les ondes des fluides élastiques, ils se trouvent, dans la seconde, *transversaux*, c'est-à-dire partout perpendiculaires aux rayons ou tangents aux surfaces d'onde, conformément à la prévision que Fresnel avait formulée quelques années auparavant pour les ondes de l'éther.

Or, vers la même année 1830, Ostrogradsky, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, donnait aux intégrales du problème une forme assez simple, au moins dans le cas où aucune *impulsion* (ou vitesse initiale) n'accompagne les déplacements initiaux, et il en déduisait que l'onde, à l'époque t, s'étend aux distances R de l'origine comprises entre la plus grande et la plus petite des deux limites $At \pm \varepsilon$, $at \pm \varepsilon$, occupant ainsi, avec les deux ondes de Poisson dont Ostrogradsky ne fait pas le départ, toutes les couches sphériques intermédiaires du milieu.

Je me propose de montrer ici qu'effectivement l'état naturel ne se trouve pas tout à fait rétabli dans l'intervalle des deux ondes de Poisson, que les particules s'y meuvent *uniformément en sens divers*, mais avec déplacements de l'ordre de petitesse de $\frac{1}{R^2}$ et vitesses de l'ordre de $\frac{1}{R^3}$ seulement, celles-ci s'annulant même quand il n'y avait pas d'impulsion initiale, cas où ces déplacements, invariables en chaque point, passent à l'ordre de $\frac{1}{R^3}$ ou ne sont comparables qu'au cube des ξ, η, ζ produits dans la plus lente des deux ondes respectives.

Une faible agitation doit donc régner, en général, au sein des milieux solides, homogènes, mais hétérotropes, dans les intervalles d'épaisseur croissante séparant les ondes issues d'un même ébranlement local et animées de vitesses de propagation distinctes.

II. Les équations indéfinies des petits mouvements, pour le milieu élastique isotrope, sont, comme on sait, avec deux constantes spécifiques A, a (racines carrées positives des quotients de $\lambda + 2\mu$, μ par la densité),

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} - a^2 \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) = (A^2 - a^2)\frac{d\theta}{d(x, y, z)}, \\ & \text{où} \\ & \qquad \theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}. \end{aligned} \right.$$

Il faut y joindre, comme conditions d'*état initial*, que, pour $t = 0$, ξ, η, ζ et $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ se réduisent à six fonctions de x, y, z, nulles hors de la petite sphère d'ébranlement, mais données *arbitrairement* dans cette sphère, sauf les conditions de continuité en x, y, z nécessaires, même à l'instant $t = 0$, pour que les équations (1) aient un sens.

Les trois inconnues ne sont pas séparées dans le système (1). Mais si l'on peut déterminer préalablement la dilatation cubique θ, les seconds membres de (1) deviendront des fonctions explicites de x, y, z, t; et l'on aura, pour chaque déplacement ξ, η, ζ, une équation linéaire à second membre, dont l'intégrale générale comprendra, avec une intégrale particulière, l'intégrale générale de la même équation prise sans second membre ou, dès lors, identique *à l'équation du son* qu'on sait intégrer.

III. Or, les équations (1), différentiées en x, y, z et ajoutées, donnent, comme on sait,

$$(2) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = A^2 \Delta_2 \theta.$$

D'ailleurs, les valeurs initiales de θ et de sa dérivée première en t, nulles hors de la sphère d'ébranlement, sont, dans cette sphère, deux fonctions connues, $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, sommes des dérivées respectives en x, y, z des trois déplacements initiaux donnés ξ_0, η_0, ζ_0 et des trois vitesses initiales analogues, également données. L'expression de θ, que nous écrirons explicitement $\theta(x, y, z, t)$, sera donc, d'après l'intégrale classique de Poisson, écrite en employant la notation simple des *potentiels sphériques*,

$$(3) \quad \theta(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi A^2} \frac{d}{dt} \int_\sigma \frac{f(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma}{t} + \frac{1}{4\pi A^2} \int_\sigma \frac{F(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma}{t};$$

σ y désigne la surface, $4\pi r^2$ ou $4\pi A^2 t^2$, de la sphère, d'un rayon r égal à At, décrite autour du point quelconque (x, y, z) comme centre; $d\sigma$ est un quelconque de ses éléments, à coordonnées (x_1, y_1, z_1); et $\int_\sigma$ désigne des intégrales étendues à toute la sphère, mais réductibles, grâce aux fonctions $f(x_1, y_1, z_1)$, $F(x_1, y_1, z_1)$, à leurs éléments concernant les parties de la sphère situées dans la région des ébranlements.

Il en résulte, comme on sait, que l'onde constituée par les dilatations cubiques θ s'étend, à l'époque t, sur l'épaisseur 2ε, aux distances R de l'origine comprises entre $At - \varepsilon$ et $At + \varepsilon$, se propageant ainsi avec la vitesse A.

IV. Pour les points (x, y, z) situés, *sur un même rayon vecteur*, à des

distances R très grandes par rapport à ε, les sphères $4\pi r^2$ n'ont de commun avec la région d'ébranlement que de petites calottes, presque indiscernables des sections planes de celle-ci normales au rayon vecteur considéré et définies par leur distance δ à l'origine. Enfin cette distance δ est variable, elle-même, de $-\varepsilon$ à ε pour r croissant de $R-\varepsilon$ à $R+\varepsilon$. Dès lors, si l'on appelle $\psi(\delta)$, $\Psi(\delta)$ les deux intégrales

$$\int_\sigma f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma, \qquad \int_\sigma F(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma,$$

évaluées pour l'orientation effective du rayon vecteur et nulles hors des limites $\delta = \mp\varepsilon$, il vient, sauf erreur comparable à $\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2$,

$$(4)\qquad \begin{cases} \left(\text{pour } \frac{R}{\varepsilon} \text{ très grand}\right) \\ \theta(x, y, z, t) = \frac{A\psi(\delta) + \Psi(\delta)}{4\pi AR}, \qquad \text{où} \qquad \delta = At - R. \end{cases}$$

Les fonctions ψ, Ψ changent, d'un point à l'autre, très vite avec δ, mais lentement avec l'orientation du rayon vecteur, comme le fait celle-ci elle-même. Enfin, l'on déduit aisément de l'équation (2), et du fait de l'annulation initiale tant des déplacements ξ, η, ζ que des vitesses $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ hors de la sphère d'ébranlement, les annulations continues de l'intégrale $\int \theta(x, y, z, t)\,d\varpi$ étendue à tout l'espace (appelé ϖ) et, par suite, des valeurs moyennes de θ et de sa dérivée en t, dans la région sans cesse finie où ces fonctions difffèrent de zéro. D'où il suit, en particulier, que $\psi(\delta)$ et $\Psi(\delta)$ ont, entre les limites $\delta = \mp\varepsilon$, leurs valeurs moyennes nulles, et que θ s'annule aussi, *en moyenne*, d'après (4), soit sur chaque normale 2ε commune aux deux faces interne et externe de l'onde sphérique des dilatations θ, soit en chaque point (x, y, z) pendant que l'onde y passe.

V. Formons maintenant au système (1) une intégrale particulière (ξ_1, η_1, ζ_1) aussi simple que possible, c'est-à-dire s'annulant à l'infini comme ξ, η, ζ, n'impliquant aucune rotation moyenne et où ξ_1, η_1, ζ_1, *dès lors* dérivées partielles en x, y, z d'une même fonction Φ de x, y, z, t, correspondent à une dilatation cubique, $\Delta_2\Phi$, identique à la vraie $\theta(x, y, z, t)$. On connaît donc les trois paramètres différentiels $\Delta_2(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, dérivées respectives en x, y, z de $\theta(x, y, z, t)$; et ξ_1, η_1, ζ_1, d'ailleurs nuls à l'infini, se trouvent complètement déterminés. Il en est, par suite, de même de Φ,

abstraction faite d'un terme arbitraire fonction de t seul; et, d'après le théorème de Poisson, l'on a pour Φ le potentiel newtonien

$$(5) \qquad \Phi = -\frac{1}{4\pi}\int_{\varpi}\frac{\theta(x_1, y_1, z_1, t)\, d\varpi}{r},$$

où ϖ désigne soit tout l'espace, à coordonnées x_1, y_1, z_1 pour son élément $d\varpi$, soit seulement l'espace, sans cesse borné, dans lequel θ diffère de zéro, et où enfin r est la distance du *point potentié* (x, y, z) à l'élément $d\varpi$ de cet espace. On déduit aisément de là et de (2)

$$(6) \qquad \frac{d^2\Phi}{dt^2} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\varpi}\frac{A^2\Delta_2\theta(x_1, y_1, z_1, t)}{r}\, d\varpi = A^2\Delta_2\Phi = A^2\theta(x, y, z, t),$$

relations permettant de reconnaître, d'une part, que les dérivées de Φ en x, y, z vérifient bien le système (1), d'autre part, que le potentiel Φ est, *en chaque point* (x, y, z), *fonction linéaire de* t *avant* que l'onde des dilatations cubiques θ ait atteint ce point et *après* qu'elle l'a dépassé. Or, dans ce dernier cas, il est assez facile de voir, en faisant grandir indéfiniment t au second membre de (4), que l'expression (5) de Φ tend vers zéro. Donc, *dans le système des déplacements* ξ_1, η_1, ζ_1 *producteurs, sans rotation moyenne, des dilatations cubiques effectives, le repos et l'état naturel se trouvent pleinement rétablis à l'arrière de l'onde même des dilatations cubiques* θ.

Mais *il n'en est généralement pas de même à l'avant de cette onde,* où Φ, fonction linéaire de t, a visiblement, d'après l'état initial, la valeur $\Phi_0 + \Pi_0 t$, si l'on pose

$$(7) \qquad \Phi_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_{\varpi}\frac{f(x_1, y_1, z_1)\, d\varpi}{r}, \qquad \Pi_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_{\varpi}\frac{F(x_1, y_1, z_1)\, d\varpi}{r},$$

intégrales qui, aux grandes distances R de l'origine, sont de l'ordre de l'inverse de R^2, vu l'annulation des valeurs moyennes de f et de F dans la région d'ébranlement. Par suite, les déplacements ξ_1, η_1, ζ_1, dérivées de Φ en x, y, z, sont des fonctions linéaires de t ayant leurs coefficients comparables à l'inverse de R^3. On voit que, même à l'approche de l'onde des dilatations cubiques, c'est-à-dire alors que At devient très grand comme R, ces déplacements sont encore aussi petits que l'inverse de R^2 et négligeables à côté de ceux qu'apporte cette onde, de l'ordre de $\frac{1}{R}$, et qu'il nous reste à considérer.

VI. A cet effet, les premier et dernier membres de (6), intégrés deux

fois en t, *sur place*, soit à partir de $t = 0$, soit, plus simplement, en reculant depuis t infini (où Φ s'annule), donnent, après substitution à θ de sa valeur approchée (4),

$$(8)\quad \begin{cases} \left(\text{pour } \frac{R}{\varepsilon} \text{ très grand}\right) \\ \Phi = \frac{1}{4\pi R}\left[\int_{\varepsilon}^{At-R} \frac{A\psi(\delta) - \delta\Psi(\delta)}{A} d\delta + \frac{At - R}{A}\int_{\varepsilon}^{At-R} \Psi(\delta)\, d\delta\right], \end{cases}$$

expression ayant, entre les limites $At - R = \pm\varepsilon$, sa dérivée en t très simple, de l'ordre de son premier facteur ou de l'inverse de R. Cette fonction Φ varie *rapidement* avec la différence $\delta = At - R$ et, en outre, *lentement* avec les coordonnées x, y, z de l'extrémité du long rayon vecteur R émané de l'origine. Ses dérivées ξ_1, η_1, ζ_1 en x, y, z s'obtenant donc très sensiblement par la variation de δ seul, il est clair que les déplacements ξ_1, η_1, ζ_1 seront les produits de $-\frac{1}{A}\frac{d\Phi}{dt}$ par les trois dérivées de R en x, y, z, cosinus directeurs du rayon vecteur R. Le déplacement (ξ_1, η_1, ζ_1) *résultant* est donc *longitudinal* et comparable à l'inverse de R.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Sur quelques difficultés que présente le dosage de l'oxyde de carbone dans les mélanges gazeux.* Note de MM. **Armand Gautier** et **Clausmann**.

On sait aujourd'hui retrouver et doser de très faibles proportions d'oxyde de carbone mélangées à l'air et à d'autres gaz. L'un de nous a montré qu'à la dilution du cent-millième, et aux dilutions plus grandes encore, l'oxyde de carbone est oxydé jusqu'à sa dernière trace en circulant à 65°-70° sur de l'anhydride iodique dont il met l'iode en liberté ([1]). Il est facile de doser ensuite cet iode soit en le faisant passer à l'état d'iodure de cuivre ou d'argent, soit colorimétriquement ([2]). A des dilutions moindres, quand l'oxyde de carbone se trouve à l'exclusion d'autres gaz combustibles, mélangé à l'air aux doses de un millième à un centième, on peut le doser encore assez exactement à l'aide du grisoumètre. Mais le problème se complique

([1]) *Comptes rendus*, t. CXXVI, p. 793, 931, 1299 et 871; *Ann. de Chim. et de Phys.*, 7e série, t. XXII, p. 26 et 73.

([2]) A ces dilutions extrêmes, de tous les gaz combustibles, y compris l'acétylène, l'oxyde de carbone est seul oxydé (A. Gautier; Albert-Lévy et Pécoul).

quand ce corps est mélangé en proportions plus notables à divers gaz, combustibles ou non, tels que l'éthylène, le méthane, l'azote, l'hydrogène, l'oxygène, etc.

Dans les cas où un mélange gazeux contient plusieurs centièmes d'oxyde de carbone, après avoir enlevé l'acide carbonique par la potasse, les gaz non saturés par le brome, et l'oxygène, s'il y a lieu, par le pyrogallol, on absorbe généralement l'oxyde de carbone par agitation avec un excès de chlorure cuivreux en solution chlorhydrique; on lave à l'eau le gaz résiduel; on mesure le volume disparu et l'on continue l'analyse par les méthodes classiques. Mais cette manière de faire est passible d'incertitudes et d'erreurs dont les principales sont : *a*, que le chlorure cuivreux, même employé en excès, n'absorbe pas la totalité de l'oxyde de carbone; *b*, que l'oxyde de carbone primitif (ou celui qu'a laissé indissous le protochlorure de cuivre), lorsqu'il est étendu d'autres gaz inertes ou combustibles, ou de gaz tonnant, ne brûle pas en entier par explosion à l'eudiomètre, même en présence d'un excès d'oxygène; *c*, que si le gaz est mélangé d'air, ou d'oxygène et d'azote, le pyrogallol, lorsqu'il est employé, augmente toujours légèrement la proportion de l'oxyde de carbone présent; tandis que l'azote est toujours faiblement oxydé et disparaît en partie par explosion. Les expériences suivantes montrent la réalité de ces causes d'erreur.

A. *Mélange d'hydrogène et d'oxyde de carbone purs* (¹). — On a fait le mélange :

$$CO = 38,07, \qquad H = 61,93.$$

Il a été divisé en deux parts α et β. La première α fut traitée par le chlorure cuivreux entièrement incolore; la seconde β par le chlorure cuivreux intentionnellement oxydé et bruni à l'air (²). On employait dans les deux cas deux fois la quantité de

---

(¹) L'hydrogène pur a été préparé en faisant passer sous une cloche placée sur le mercure de l'eau bouillie acidulée, puis de l'amalgame de sodium à 3 pour 100. On lavait ensuite le gaz à la potasse.

Pour obtenir l'oxyde de carbone à l'état tout à fait pur, on faisait passer sous une cloche remplie de mercure la liqueur acide chargée de la combinaison de ce gaz avec le chlorure cuivreux, et l'on décomposait cette combinaison en introduisant ensuite sous cette cloche une solution de potasse bouillie.

On s'est assuré que les gaz ainsi formés étaient entièrement purs.

(²) Nous avons pensé que le chlorure cuivreux plus ou moins oxydé à l'air pouvait peut-être se réduire par l'oxyde de carbone et donner ainsi un peu d'acide carbonique. Nos expériences démontrent que cette cause d'erreur est nulle ou tout à fait minime. De l'oxyde de carbone laissé plusieurs jours avec un volume d'air connu et du sous-chlorure de cuivre bruni n'a pas donné d'acide carbonique.

solution de chlorure cuivreux nécessaire pour absorber la totalité de l'oxyde de carbone; après lavage à l'eau du résidu gazeux, on mesurait par la diminution des volumes : *a*, la quantité de gaz oxyde de carbone disparu; on dosait ensuite en introduisant de l'eau de baryte dans la cloche graduée, le volume *b* d'acide carbonique qui pouvait s'être formé grâce à l'oxydation due au réactif cuivreux. Après enlèvement de la baryte, on ajoutait au gaz résiduel un petit excès d'oxygène et l'on faisait détoner à l'eudiomètre. On mesurait la contraction puis le volume *c* du CO^2 répondant à la combustion du volume égal de CO non absorbé primitivement par le chlorure cuivreux. Voici les résultats obtenus :

	α.		β.	
a. CO enlevé par Cu^2Cl^2	36,45	CO total 37,75	36,89	CO total 37,86
b. CO^2 formé par oxydation due à Cu^2Cl^2	trace		trace	
c. CO^2 répondant à l'oxydation de CO non enlevé par Cu^2Cl^2	1,30		0,97	
H	61,96		61,89	
	99,71		99,75	

On voit que l'hydrogène est exact; mais l'oxyde de carbone est en déficit de 0,32 à 0,21 pour 100. Ce déficit s'explique par ce fait que l'oxyde de carbone qui reste après lavage au protochlorure de cuivre, lorsqu'il n'est mélangé qu'en petite quantité (1,5 à 0,5 pour 100) aux gaz combustibles, en particulier à l'hydrogène, ne brûle jamais entièrement, même en présence d'un excès modéré ou non d'oxygène.

On remarquera combien serait plus grande l'erreur de dosage de l'oxyde de carbone calculé, si l'on se bornait à enlever ce gaz par un simple lavage au chlorure cuivreux. Un second lavage diminue l'erreur, mais ne la fait pas encore disparaître complètement, comme on le verra.

B. *Mélange d'hydrogène et d'oxyde de carbone* (CO = 7,5 pour 100). — On fait le mélange :

$$CO = 7,5; \qquad H = 92,5.$$

L'analyse faite dans les mêmes conditions que ci-dessus a donné :

a. CO enlevé par Cu^2Cl^2	6,19	CO total 6,63
b. CO^2 dû à l'oxydation par le réactif	nul	
c. CO^2, après explosion, répondant à CO non enlevé par Cu^2Cl^2	0,44	
H	92,37	
	99,00	

On voit que le dosage de l'oxyde de carbone est encore plus incorrect dans ce cas; à mesure que la quantité relative de ce gaz diminue dans le mélange son absorption par Cu^2Cl^2 est plus difficile. Après l'explosion à l'eudiomètre, la quantité de l'oxyde de carbone non oxydée augmente aussi

en raison de la plus grande dilution de cet oxyde résiduel dans l'hydrogène qu'il accompagne ([1]) et malgré l'excès d'oxygène employé.

C. *Mélanges d'oxyde de carbone et d'air.* — On a fait les mélanges suivants :

		α.	β.
		vol	vol
	CO	21,02	9,43
Air	Azote	62,48	71,59
	Oxygène	15,50	18,98

Après avoir enlevé l'oxygène par le pyrogallol, et l'oxyde de carbone *a* par *deux agitations successives* avec le chlorure cuivreux acide, puis lavage à l'eau, on détermina : *b* le CO^2 qui pouvait répondre à l'oxydation due au réactif, et *c* le CO^2 répondant à la combustion du CO non enlevé par le chlorure cuivreux. On trouva :

	Cas α.		Cas β.	
a. CO	20,35	CO	8,40	CO
b. CO^2 (d'oxydation)	trace	total	trace	total
c. CO^2 (d'explosion)	trace	20,35	0,23	8,63
Azote restant ([2])	62,77		71,99	
Oxygène	16,37		18,82	
	99,49		99,44	

On voit encore ici que, non seulement le CO trouvé est en déficit dans les deux cas (*perte* = 0,67 pour 100 dans le cas α et 0,81 pour 100 dans le cas β), mais encore que ce déficit augmente à mesure que l'oxyde de carbone est relativement moins abondant, c'est-à-dire plus étendu d'autres gaz.

D'autre part, et comme confirmation, l'azote dosé comme résidu, quoique corrigé du petit volume d'oxyde de carbone qui se formait dans les conditions de notre expérience par l'absorption de l'oxygène employé en excès, est augmenté *en apparence*, dans les deux cas, du volume de l'oxyde de carbone résiduel non brûlé à l'eudiomètre.

D. *Mélange d'oxyde de carbone, d'hydrogène et d'un peu d'air.* — On fait le mélange suivant :

	CO	32,73
	H	64,56
Air	Azote	2,16
	Oxygène	0,55

([1]) Il y avait 1,29 de CO en 62 volumes de H dans le premier cas, et 1,31 de CO pour 92 volumes de H dans le second.

([2]) Dans les deux cas α et β, l'azote resté comme résidu et l'oxyde de carbone total ont été corrigés du faible volume de CO que donnait, dans les conditions de nos expériences, l'emploi du pyrogallol.

On enlève d'abord l'oxygène par le pyrogallol; on lave ensuite deux fois successivement le mélange gazeux au protochlorure de cuivre puis à l'eau, et l'on opère comme dans le cas précédent. On trouve :

a. CO par Cu^2Cl^2	31,74	CO total 32,23
b. CO^2 (par le réactif)	nul	
c. CO^2 du CO non enlevé par Cu^2Cl^2 et brûlé à l'eudiomètre	0,49	
H	65,27	
Azote	1,94	
Oxygène	0,55	
	99,99	

On voit encore ici que CO total, *a fortiori* celui qu'enlève seul le chlorure cuivreux, est trop faible (de 0,50 pour 100 environ), la partie restant indissoute malgré les deux lavages au chlorure cuivreux (1 pour 100) ne se brûlant pas complètement à l'eudiomètre. Quant à l'hydrogène, ce gaz étant calculé d'après la contraction observée (après qu'on en a distrait celle qui résulte de la combustion d'un demi-centimètre cube de CO), son volume apparent augmente parce qu'une petite quantité de l'oxygène est employée à oxyder un peu d'azote qui disparaît lui-même en partie comme nous l'avons directement constaté; il en résulte, après explosion, une contraction un peu trop grande.

E. Dans ces différents cas on trouve donc un déficit sensible d'oxyde de carbone dû à la combustion imparfaite, à l'eudiomètre, de la petite quantité d'oxyde de carbone que n'avait pas enlevée le chlorure cuivreux. Comme on le voit, deux lavages successifs avec ce réactif peuvent encore laisser jusqu'à 1 pour 100 d'oxyde de carbone dans le gaz total, et il peut en rester de 0,5 à 0,3 pour 100 après explosion à l'eudiomètre.

Les expériences suivantes démontrent ce dernier fait plus explicitement encore.

On prépare le mélange

α. CO..... 13,03 Air..... 86,97 pour 100

Ce mélange ne brûle ni à l'eudiomètre, ni directement [1], quoique la fraction *combustible + comburant* représente 20 pour 100 du volume total.

---

[1] Nous nous sommes assurés qu'un mélange de 15 volumes de CO et 85 d'air ne brûle pas directement au contact de la flamme.

Au mélange α on ajoute du gaz tonnant dans la proportion de un tiers et l'on brûle à l'eudiomètre. On trouve CO = 12,90 au lieu de 13,03. Il y a donc encore ici un léger déficit.

On fait le mélange

β. CO..... 4,09 Air..... 95,91 pour 100

On l'additionne de son volume de gaz tonnant, et l'on trouve après explosion à l'eudiomètre :

CO = 3,65 au lieu de 4,09.

On voit encore dans ces deux cas, malgré l'excès d'oxygène et de gaz tonnant ajoutés, que le gaz oxyde de carbone ne brûle qu'imparfaitement à l'eudiomètre et d'autant moins qu'il est plus étendu.

F. Il reste donc établi que les méthodes de dosage de l'oxyde de carbone mêlé à d'autres gaz combustibles, soit qu'on emploie le protochlorure de cuivre, même avec les précautions et corrections ci-dessus indiquées, soit qu'on recoure à la méthode de combustion à l'eudiomètre en présence d'un excès modéré d'oxygène, donnent toujours un léger déficit (1 à 0,3 pour 100). La perte d'oxyde de carbone par non-combustion à l'eudiomètre est d'autant plus grande que ce gaz est plus étendu et quel que soit l'excès, petit ou grand, d'oxygène.

G. L'expérience suivante est bien propre à montrer la résistance de l'oxyde de carbone à l'oxydation en présence d'autres gaz combustibles, et particulièrement d'hydrogène. On a fait le mélange suivant :

CO....... 7,34; Azote..... 73,31; O......... 19,32

A ce mélange on ajoute deux fois le volume d'hydrogène qui peut s'unir à l'oxygène présent, et l'on fait passer l'étincelle. On observe après détonation que l'oxygène a totalement disparu sous forme d'eau, mais *qu'il ne s'est pas fait une trace d'acide carbonique.* Entre ces deux corps combustibles, l'hydrogène et l'oxyde de carbone, et quoique ce dernier gaz brûle déjà à une température plus basse que l'hydrogène, l'oxygène s'est porté *exclusivement* sur le corps dont la combustion produit le plus de chaleur. C'est là une intéressante confirmation de la règle du *travail maximum.*

Il suit de ces diverses constatations que, dans un mélange d'azote ou d'air et d'oxyde de carbone, ou bien d'azote, de gaz combustibles divers et d'oxyde de carbone, on ne peut retrouver la totalité de ce dernier gaz soit par explosion en présence d'oxygène, soit par lavage au chlorure cuivreux.

Mais, après ce lavage, ou après explosion à l'eudiomètre, il sera toujours possible de doser l'oxyde de carbone résiduel en faisant circuler les gaz restants, étendus d'air ou non suivant les cas, à travers un tube à anhydride iodique chauffé à 70° qui oxyde jusqu'aux dernières traces d'oxyde de carbone et permet ainsi de le doser.

En finissant, nous ferons remarquer que, lorsque, après lavages successifs à la potasse, au brome et au chlorure cuivreux on pense avoir enlevé des mélanges gazeux la totalité des gaz non saturés, la petite quantité de gaz carbonique qu'on peut trouver alors, après explosion à l'eudiomètre, peut faire admettre à tort l'existence, dans le mélange primitif, de gaz saturés, tels que l'éthane ou le méthane, tandis que l'acide carbonique ainsi produit provient, en réalité, du résidu d'oxyde de carbone qui n'avait pu être totalement enlevé par un lavage soigné au protochlorure de cuivre.

MÉCANIQUE RATIONNELLE. — *Sur une inégalité importante dans l'étude des quasi-ondes de choc.* Note de M. **P. Duhem**.

Si l'on prend un volume quelconque U au sein d'une masse fluide en mouvement, on peut écrire [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, Première partie, égalités (86) et (91); Première série, p. 30 et 32] l'égalité

$$(1) \qquad \mathrm{E}\int_s k(\rho,\ \mathrm{T})\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial n}ds - \mathrm{E}\int_{\mathrm{U}} \rho \mathrm{T}\frac{d\sigma(\rho,\ \mathrm{T})}{dt}d\varpi + 2\int_{\mathrm{U}} \mathfrak{D}\, d\varpi = 0.$$

s est ici la surface qui limite le volume U; n est la demi-normale à cette surface dirigée vers l'extérieur; $\sigma(\rho,\ \mathrm{T})\,dm$ est l'entropie de la masse élémentaire dm; *la quantité* $\mathfrak{D}$, qui dépend des actions de viscosité, *est essentiellement positive*.

Sur la surface S_0 qui limite d'un côté une quasi-onde de choc, prenons une aire finie quelconque A_0; par le contour de cette aire menons des normales à la surface S_0; ces normales forment une surface réglée C qui découpe sur la surface S_1 une aire finie A_1. Appliquons l'égalité (1) au volume U, qui est une quantité très petite de l'ordre de h.

Si l'on admet pour les actions de viscosité les expressions proposées par Navier, $\mathfrak{D}$ est une somme de termes; chacun de ces termes est le produit de l'un des coefficients de viscosité λ ou μ par le carré de l'une des dérivées partielles de u, v, w ou par le produit de deux de ces dérivées. $\mathfrak{D}$ est donc,

au sein de la quasi-onde, une quantité très grande de l'ordre de $\frac{1}{h}$ et $\int_U \mathfrak{D}\, d\varpi$ est une quantité finie.

Dès lors, l'égalité (1) donne l'inégalité

$$(2) \qquad \int_s k(\rho, T)\frac{\partial T}{\partial n} ds - \int_U \rho T \frac{d\sigma(\rho, T)}{dt} d\varpi < 0$$

et cette inégalité doit subsister si l'on néglige au premier membre les quantités très petites de l'ordre de h.

La première intégrale se compose de trois parties qui se rapportent respectivement aux surfaces A_0, A_1 et C. La normale à la surface C étant parallèle à la surface S_0, $\frac{\partial T}{\partial n}$ n'a point de très grandes valeurs en cette surface qui est elle-même très petite de l'ordre de h; si dS_0 est un élément de l'aire A_0 et dS_1 l'élément correspondant de l'aire A_1, la différence $(dS_1 - dS_0)$ est de l'ordre de $h\, dS_0$; *en négligeant donc les quantités très petites de l'ordre de h,* nous pouvons écrire

$$(3) \qquad \int_s k(\rho, T)\frac{\partial T}{\partial n} ds = \int_{A_0}\left[k(\rho_0, T_0)\frac{\partial T_0}{\partial n_0} + k(\rho_1, T_1)\frac{\partial T_1}{\partial n_1}\right] dS_0.$$

Selon l'égalité (5) de notre Note précédente [1] et les remarques faites il y a un instant, nous pouvons, aux quantités près de l'ordre de h, écrire

$$(4) \qquad \int_U \rho T \frac{d\sigma(\rho, T)}{dt} d\varpi = -\int_{A_0}\int_{M_0}^{M_1} \wp \rho T \frac{\partial\sigma(\rho, T)}{\partial l} dl\, dS_0.$$

En vertu des égalités (3) et (4), l'inégalité (2) devient

$$\int_{A_0}\left[k(\rho_0, T_0)\frac{\partial T_0}{\partial n_0} + k(\rho_1, T_1)\frac{\partial T_1}{\partial n_1} + \int_{M_0}^{M_1} \wp \rho T \frac{\partial\sigma(\rho, T)}{\partial l} dl\right] dS_0 < 0.$$

Cette inégalité doit avoir lieu quelle que soit l'aire A_0 que l'on ait découpée sur la surface S_0. On doit donc avoir, d'une manière générale, en tout point M_0 de la surface S_0,

$$(5) \qquad k(\rho_0, T_0)\frac{\partial T_0}{\partial n_0} + k(\rho_1, T_1)\frac{\partial T_1}{\partial n_1} + \int_{M_0}^{M_1} \wp \rho T \frac{\partial\sigma(\rho, T)}{\partial l} dl < 0.$$

Si la quantité $\sigma(\rho, T)$ varie toujours dans le même sens lorsque le point M se déplace, toujours dans le même sens, de M_0 vers M_1; s'il en est de

---

[1] *Quelques lemmes relatifs aux quasi-ondes de choc* (*Comptes rendus*, t. CXLII, p. 377, séance du 12 février 1906).

même de chacune des quantités φ, ρ, T, l'inégalité (5) peut se mettre sous une forme un peu différente. Remarquons qu'une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite valeur du produit $\varphi\rho T$ peut toujours se mettre sous la forme $\Phi R \Theta$, Φ étant compris entre φ_0 et φ_1, R entre ρ_0 et ρ_1, et Θ entre T_0 et T_1. L'inégalité (5) pourra alors s'écrire :

$$(6) \quad k(\rho_0, T_0)\frac{\partial T_0}{\partial n_0} + k(\rho_1, T_1)\frac{\partial T_1}{\partial n_1} + \Phi R \Theta[\sigma(\rho_1, T_1) - \sigma(\rho_0, T_0)] < 0.$$

Les inégalités (5) et (6) sont deux formes de l'inégalité fondamentale que nous voulions obtenir.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur l'addition de l'acide chlorhydrique à l'oxyde d'isobutylène* $(H^3C)^2.C.CH^2$ (pont O entre C et CH²). Note de M. **Louis Henry**.

La substitution, dans l'oxyde d'éthylène, H^2C-CH^2 (pont O), de groupements hydrocarbonés C^nH^x, tels que CH^3, C^2H^5, etc., à l'hydrogène, détermine une série de composés renfermant les systèmes oxy-bi-carbonés

$-CH-CH^2$; $>C-CH^2$; $-CH-CH-$; $>C-CH$; $>C-C<$. (chacun avec pont O)

Ces corps sont les anhydrides des glycols *continus* correspondants. Leur manière d'*être,* au point de vue physiologique et leur manière d'*agir,* au point de vue chimique, les rendent fort intéressants. Ils se distinguent par une remarquable aptitude à la combinaison directe : ils s'ajoutent aux hydracides halogénés, à l'ammoniaque et aux amines mono- et bi- substituées, aux sulfites acides, etc. et même à l'eau dans certaines conditions.

Les systèmes additionnels XX′, constitués d'unités d'action chimique diverses, tels que HCl, $H.NH^2$, forment avec l'oxygène des groupements hétérogènes —OH et Cl, —OH et $-NH^2$, qui s'ajoutent à chacun des atomes de carbone du complexe oxygéné primitif $-C-C-$ (pont O). Alors que ce complexe n'est pas symétrique, comme dans les systèmes

$-CH-CH^2$; $>C-CH^2$; $>C-CH-$. (chacun avec pont O)

La question se pose de savoir comment se répartissent ces unités d'action

chimique différentes, —OH et Cl, —OH et NH^2, etc., etc. sur ces atomes de carbone inégalement hydrogénés.

En ce qui concerne les hydracides halogénés et spécialement l'acide chlorhydrique, la question est résolue pour le plus simple de ces trois systèmes — HC — CH^2. En s'ajoutant à l'acide HCl, l'oxyde de propylène et son dérivé chloré primaire, l'épichlorhydrine, forment des composés qui sont *alcool secondaire* $\overset{|}{\underset{|}{C}}H(OH)$ et *éther chlorhydrique primaire*

$$\begin{array}{l} H^2C.Cl \\ \quad | \\ H^2C\diagdown \\ \quad | \quad\ \ >O, \\ HC\diagup \\ \quad | \\ \ CH^3 \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{l} H^2CCl \\ \quad | \\ HC(OH); \\ \quad | \\ \ CH^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} H^2C\diagdown \\ \quad | \quad\ \ >O, \\ HC\diagup \\ \quad | \\ H^2CCl \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{l} H^2C.Cl \\ \quad | \\ HC(OH). \\ \quad | \\ H^2C.Cl \end{array}$$

Il était intéressant de savoir ce qu'il adviendrait dans le cas d'un composé renfermant le système $>C - CH^2$ (pont O), le système dissymétrique *par excellence*, et le plus éloigné du système symétrique de l'oxyde d'éthylène primordial $H^2C - CH^2$ (pont O).

Ce système dissymétrique existe dans l'*oxyde d'isobutylène*

$$\begin{array}{l} H^3C\diagdown \\ \qquad\quad >C - CH^2. \\ H^3C\diagup \quad \diagdown\ \diagup \\ \qquad\qquad\ O \end{array} \text{Éb. } 52^o.$$

Ce composé s'obtenant aisément aujourd'hui, je me suis proposé de résoudre cette question, en ce qui le concerne [1].

La différence d'aptitude à l'éthérification chlorhydrique, que l'on constate d'une manière si instructive, notamment à l'étage C^4, entre le compo-

---

[1] La chlorhydrine isobutylénique $\begin{array}{l} H^3C\diagdown \\ H^3C\diagup \end{array} C(OH) - CH^2Cl$ s'obtient, avec un rendement considérable, par la réaction du composé magnésien du bromure de méthyle $H^3C - Mg.Br$, sur l'acétone monochlorée $H^3C - CO - CH^2Cl$ et le chloroacétate d'éthyle $ClCH^2 - CO(OC^2H^5)$.

L'action de la potasse caustique, sèche et pulvérulente, sur cette chlorhydrine, fournit, dans les conditions les plus avantageuses, l'oxyde d'isobutylène

$$\begin{array}{l} H^3C\diagdown \\ \qquad\quad >C - CH^2, \\ H^3C\diagup \quad \diagdown\ \diagup \\ \qquad\qquad\ O \end{array} \text{Éb. } 51^o\text{-}52^o.$$

sant $-\overset{|}{\underset{|}{C}}-OH$, alcool tertiaire du triméthylcarbinol $(H^3C)^3.C(OH)$ et le composant H^2C-OH, alcool primaire, de l'alcool isobutylique $(H^3C)^2.CH-CH^2(OH)$, m'autorisait à penser qu'il se formerait dans ces circonstances une *chlorhydrine isobutylénique,* alcool primaire de la formule $\genfrac{}{}{0pt}{}{H^3C}{H^3C}\!\!>\!CCl-CH^2(OH)$.

L'expérience a confirmé cette prévision.

L'oxyde d'isobutylène se combine énergiquement et avec un dégagement de chaleur considérable à l'acide chlorhydrique, soit gazeux, soit en dissolution aqueuse *concentrée.* Il en résulte une nouvelle *chlorhydrine isobutylénique* $C^4H^8.(OH)Cl$, répondant à la formule $\genfrac{}{}{0pt}{}{H^3C}{H^3C}\!\!>\!CCl-CH^2(OH)$. Je la désignerai par la lettre β pour la distinguer plus aisément, quant à son nom, de la chlorhydrine qui a servi à faire l'oxyde d'isobutylène dont elle dérive. Je désignerai cette dernière par la lettre α; elle répond à la formule $\genfrac{}{}{0pt}{}{H^3C}{H^3C}\!\!>\!C(OH)-CH^2Cl$.

Comme on le devine, ces deux composés sont extérieurement à peu près identiques. Ce sont des liquides incolores, quelque peu épais, agréablement odorants, surtout le composé β, alcool primaire. Il existe cependant entre eux des différences notables au point de vue *physique* et surtout au point de vue *chimique.*

a. Au point de vue *physique* : La différence porte surtout sur la *volatilité* et la *fusibilité.*

La chlorhydrine β bout à 132°-133°, sous la pression ordinaire, donc quelques degrés plus haut que la chlorhydrine α qui bout à 126°-128° (1).

Des rapports de volatilité presque identiques se constatent entre les deux *chloroacétines* correspondantes

$$\begin{array}{l} H^3C \quad CH^3 \\ \quad\diagdown\diagup \\ \quad C(O.CO.CH^3) \\ \quad | \\ \quad CH^2Cl \end{array}\quad \text{Éb. } 153^\circ\text{-}154^\circ, \qquad \begin{array}{l} H^3C \quad CH^3 \\ \quad\diagdown\diagup \\ \quad CCl \\ \quad | \\ \quad CH^2(O.CO.CH^3) \end{array}\quad \text{Éb. } 160^\circ\text{-}161^\circ.$$

(1) Des différences du même genre s'observent entre les deux *chlorhydrines propyléniques.*

$$\begin{array}{l} H^2CCl \\ HC-OH \\ CH^3 \end{array}\ \text{Éb. } 126^\circ\text{-}127^\circ \qquad \begin{array}{l} H^2C-OH \\ HCCl \\ CH^3 \end{array}\ \text{Éb. } 133^\circ\text{-}134^\circ$$

Voir mon Mémoire : *Sur les dérivés propyléniques* (*Bulletin de l'Académie de Belgique,* 1903, p. 397).

On pouvait inférer de la qualité *alcool tertiaire* de la chlorhydrine α qu'elle serait plus facile à congeler et *moins fusible* que son isomère. Il en est effectivement ainsi. Refroidie dans un mélange de neige carbonique et d'éther, cette chlorhydrine

$$(CH^3)^2 - C(OH) - CH^2Cl$$

se congèle et cristallise bien en une masse fusible à — 20°.

Dans les mêmes conditions la chlorhydrine β, $(CH^3)^2 - CCl - CH^2(OH)$, est incongelable.

b. Au point de vue *chimique*. Sans recourir à l'*oxydation* qui différencie si profondément un alcool *primaire* d'avec un alcool *tertiaire*, l'acide chlorhydrique et l'acide nitrique suffisent déjà à différencier nettement ces deux chlorhydrines.

L'une et l'autre se dissolvent, à froid et provisoirement, dans l'acide chlorhydrique fumant. Mais, sous l'action d'un léger échauffement, vers 60°, la chlorhydrine α s'en sépare à l'état de *chlorure d'isobutylène*, $\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix}\!\!>CCl.CH^2Cl$, Eb. 108°-109°, tandis que la chlorhydrine β, alcool primaire, en s'en séparant comme son isomère, sous forme d'une couche insoluble surnageante, réapparaît comme telle, à part une faible portion qui s'est transformée en son éther simple $> CCl - CH^2(O).CH^2.Cl.C <$.

L'action de l'acide nitrique est, à certain point de vue, plus démonstrative encore.

La chlorhydrine α se dissout dans le mélange nitro-sulfurique (¹) et y reste dissoute. La chlorhydrine β, alcool primaire, s'y dissout également pour en sortir bientôt après sous forme d'une couche huileuse surnageante, qui est son éther nitrique

$$\begin{matrix} H^3C \\ H^3C \end{matrix}\!\!>C\,Cl.CH^2(NO^3),$$

composé très bien défini et qui s'obtient ainsi dans un état de pureté remarquable.

Le mélange oxydant des acides nitriques (²) se comporte aussi fort différemment vis-à-vis de ces deux isomères. La chlorhydrine α s'y dissout et n'en est que très faiblement attaquée à froid. La chlorhydrine β, au contraire, après s'y être dissoute, s'en sépare et, dès la température ordinaire, en est oxydée d'une manière continue, avec dégagement de vapeurs nitreuses. On peut prévoir que cette oxydation fournira de l'acide chloro-isobutyrique $\begin{matrix} H^3C \\ H^3C \end{matrix}\!\!>C\,Cl - CO(OH)$. Mais, en ce moment, cet essai n'est pas encore terminé.

Je puis ajouter encore qu'avec la solution du nitrite sodique, en présence de H^2SO^4 étendu, la chlorhydrine β se transforme aisément en son éther nitreux, ce qui n'a pas lieu pour la chlorhydrine α. Malheureusement cet éther nitreux

$$(H^3C)^2 - CCl - CH^2(O.NO)$$

ne se laisse pas distiller convenablement.

Je mentionnerai encore la différence de stabilité que présentent ces deux composés sous l'action de la chaleur.

(¹) 2^{vol} de H^2SO^4 et 1^{vol} de HNO^3 concentré.

(²) Parties égales en poids de HNO^3 fumant et de HNO^3 commercial.

Alors que la chlorhydrine distille comme telle, sous la pression ordinaire, la chlorhydrine β qui renferme le complexe $>CCl-CH^2(OH)$ paraît subir alors une légère altération, malgré la constance de son point d'ébullition, altération qui s'accuse par un faible dégagement de HCl, d'où résulte un léger déficit dans la teneur centésimale en chlore du produit distillé.

Quoi qu'il en soit, aucun doute ne peut subsister sur l'individualité réelle et distincte de ces deux composés isobutyléniques. On aperçoit ici, une fois de plus, la différence fonctionnelle considérable que détermine dans l'atome du carbone la présence ou l'absence de l'hydrogène.

L'existence bien constatée de ces deux chlorhydrines me permettra de reprendre, dans des conditions favorables pour la résoudre enfin, la question déjà ancienne, dont je me suis occupé autrefois en 1875 et dont divers chimistes se sont occupés depuis, de la fixation de l'acide hypochloreux (HO)Cl sur l'isobutylène $\begin{matrix}H^3C\\H^3C\end{matrix}\!\!>C=CH^2$.

En terminant, je tiens à constater toute la part qui revient, au point de de vue expérimental, dans les recherches, à mon assistant, M. Auguste De Wael.

NOMINATIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à l'élection d'un Correspondant pour la Section de Minéralogie, en remplacement de M. *de Richthofen*.

Au premier tour de scrutin, le nombre des votants étant 49,

M. Heim	obtient.	45 suffrages
M. Walcott	»	4 »

M. **Heim** est élu Correspondant de l'Académie.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** annonce la mort de M. *Arthur-François-Alphonse Bienaymé*, Correspondant de l'Académie pour la Section de Géographie et Navigation.

M. le **Ministre de l'Instruction publique** invite l'Académie à présenter une liste de deux candidats à la chaire de Zoologie (Mammifères et Oiseaux) devenue vacante au Muséum d'Histoire naturelle, par suite du décès de M. *Oustalet*.

(Renvoi à la Section de Zoologie.)

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Les Tomes premier et second des *Leçons d'Algèbre et d'Analyse à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales*, par Jules Tannery. (Présentés par M. P. Painlevé.)

ASTRONOMIE. — *Observations de la comète Brooks* (1906 *a*), *faites au grand équatorial de l'Observatoire de Bordeaux*. Note de M. E. **Esclangon**.

Observations de la comète.

Dates. 1906.	Étoiles.	Temps sidéral de Bordeaux.	Δα.	ΔP.	Nombre de comparaisons.
		h m s	m s	′ ″	
Février 20...	*a*	8.47. 8,0	+5.54,2	−17.33,7	4:4
20...	*a*	9. 7.39,5	+6.27,9	−16. 9,3	4:4

Position moyenne de l'étoile de comparaison.

Étoiles.	Autorités.	Ascension droite moyenne.	Réduction au jour.	Distance polaire moyenne.	Réduction au jour.
		h m s	s	° ′ ″	″
a.....	10 Y, n° 1255 et II Y, n° 2203	7.17.33,9	+4,71	8.54.39,6	−5,0

Positions apparentes de la comète.

Dates. 1906.	Temps moyen de Bordeaux.	Ascension droite apparente.	Log. fact. parallaxe.	Distance polaire apparente.	Log. fact. parallaxe.
	h m s	h m s		° ′ ″	
Février 20..	10.47.19,0	7.23.32,8	+0,001	8.37. 0,9	+0,691
20..	11. 7.47,1	7.23. 6,5	+0,085	8.38.25,2	+0,670

La comète, relativement brillante et dépourvue de queue, présente au centre un noyau assez net d'où semble émaner la nébulosité sous forme de rayons rectilignes et serrés.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'indétermination d'une fonction d'une variable au voisinage d'une singularité transcendante.* Note de M. **Pierre Boutroux**, présentée par M. H. Poincaré.

On sait qu'au voisinage d'un point singulier transcendant, une fonction y de x peut, soit rester déterminée, soit être complètement indéterminée, soit être incomplètement indéterminée, c'est-à-dire tendre vers l'ensemble des valeurs contenues dans certaines régions du plan des y.

Considérons une fonction $y(x)$, algébroïde à l'intérieur d'un certain contour convexe C, et soit x_1 un point singulier de la fonction (isolé ou non) situé sur le contour C. Pouvons-nous dire quelle indétermination la fonction sera susceptible de présenter lorsque x tendra vers x_1 sur un chemin quelconque intérieure à C?

1° Soit la fonction $y(x)$ *uniforme* (méromorphe) à l'intérieur de C. *Si $y(x)$ devient indéterminée lorsque x tend vers x_1 sur un chemin intérieur à C, cette fonction prend, au voisinage de x_1, toutes les valeurs possibles, sauf deux au plus.*

En effet, on peut montrer qu'il existe au moins un segment de droite intérieur à C, et aboutissant en x_1 sur lequel y devient indéterminée. Supposons que, sur ce segment, $y(x)$ ne prenne pas la valeur ∞, mais prenne des valeurs arbitrairement grandes. Puisque $y(x)$ y est indéterminée, on peut trouver, sur le segment considéré, des points $\overline{x}$, arbitrairement voisins de x_1, jouissant des propriétés suivantes : au point $\overline{x}$, y prend une valeur a telle que $|a| < h$, h restant fixe lorsque $\overline{x}$ tend vers x_1; d'autre part, sur le segment $\overline{x}x_1$, ou sur une fraction finie de ce segment (par exemple les $\frac{3}{4}$), $y(x)$ prend des valeurs arbitrairement grandes.

Soient alors 0 et 1 deux nombres quelconques. Je dis qu'au voisinage de x_1, $y(x)$ devient nécessairement égale soit à 0, soit à 1. En effet, après avoir fait au besoin un changement de variable, nous pouvons supposer que le contour C tourne sa convexité du côté où la fonction y est définie. Considérons alors un cercle γ ayant pour centre un point $\overline{x}$ et passant par x_1 : $y(x)$ est holomorphe dans ce cercle, et il en résulte [1] que, si y ne prenait pas dans γ les valeurs 0 et 1, son module resterait (dans un cercle concentrique à γ et de rayon égal à $\frac{3}{4}\,\overline{x}x_1$) inférieur à une fonction finie de a, ce qui n'a pas lieu.

On observera que, étant donné que nous ne considérons la fonction $y(x)$

---

[1] J'ai énoncé dans les *Comptes rendus* (31 juillet 1905) cette proposition, qui avait été obtenue par M. Schottky sous une forme un peu différente.

qu'à l'intérieur d'un contour, un point singulier essentiel ne sera pas nécessairement, à notre point de vue, point d'indétermination.

2° Soit maintenant $y(x)$ *algébroïde* à l'intérieur du contour convexe c, mais non sur ce contour lui-même. Etudions y à l'intérieur d'un contour c intérieur à C, et faisons tendre c vers C. Dans ces conditions, ou bien le nombre des déterminations de $y(x)$ reste inférieur à un nombre fixe; ou bien ce nombre augmente indéfiniment.

Le premier cas se ramène au cas de l'uniformité. Dans le second cas, les branches de $y(x)$ convergent vers une ou plusieurs *fonctions-limites* Y [1] qui ne peuvent admettre pour singularités que les points-limites des singularités de $y(x)$. D'ailleurs, si un ensemble de branches de y converge vers une fonction Y le long d'un arc l, ces courbes ne cesseront pas de converger vers Y lorsqu'on prolongera l'arc l, pourvu que l'on ne rencontre aucun point-limite des singularités de y. On en conclut que la fonction $y(x)$ ne saurait tendre vers les points d'une région du plan des y, lorsque x tend vers le contour C, qu'au cas où l'ensemble des fonctions-limites $Y(x)$ tend vers les points de la même région. Ceci nous conduit aux énoncés suivants :

Premier cas : Supposons que les fonctions limites de la fonction multiforme $y(x)$ aient un nombre fini p de branches à l'intérieur du contour C; $y(x)$ *ne saurait devenir indéterminée lorsque l'on tend vers un point du contour* C *à moins de devenir complètement indéterminée.*

Si les fonctions limites ont un nombre infini de branches, mais admettent elles-mêmes des fonctions limites qui n'ont qu'un nombre fini de branches, on a encore la même proposition; et ainsi de suite.

Deuxième cas : Supposons que les fonctions limites de la fonction multiforme définie à l'intérieur du contour C, et, par suite, cette fonction elle-même, soient complètement indéterminées en un point x_0 intérieur à C : en ce cas, *la fonction y est complètement indéterminée en tout point intérieur à* C.

Troisième cas : Supposons que les fonctions limites de $y(x)$ présentent, en un point x_0 intérieur à C, une indétermination incomplète : en ce cas, *la fonction y présentera une indétermination incomplète en tout point intérieur à* C.

De l'examen de ces trois cas résulte la proposition suivante :

Soit une fonction multiforme définie à l'intérieur d'un contour C, *où elle est algébroïde, et soit x_0 un point intérieur à* C. *Si la fonction ne présente aucune*

---

[1] J'ai indiqué quelques résultats relatifs à ces fonctions dans un Mémoire publié dans les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (octobre 1905).

indétermination incomplète au point x_0, elle ne saurait en présenter lorsque x tend vers le contour C sur un chemin quelconque intérieur à C.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la série de Fourier.*
Note de M. **Léopold Fejér**, présentée par M. Émile Picard.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, dont la série de Fourier est partout convergente. Une question intéressante se pose : Est-ce que les sommes de Fourier :

$$(1) \qquad s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots,$$

où s_n désigne la somme des $(n+1)$ premiers termes de la série de Fourier de $f(x)$, sont oscillatoires autour de la valeur de $f(x)$ pour chaque valeur de x ? En d'autres termes : Peut-on trouver une *infinité* de membres de la suite (1) qui sont, pour la valeur x, plus grands, et une infinité, qui sont plus petits que $f(x)$?

Prenons, d'une part, la fonction sans dérivée de Weierstrass :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x),$$

où

$$0 < a < 1, \qquad b = \text{entier impair}, \qquad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

Pour les arguments $x = \frac{\mu\pi}{2b^\nu}$ ($\mu, \nu =$ entiers quelconques), qui sont denses dans chaque intervalle, la suite (1) n'est pas oscillatoire autour de $f(x)$. D'autre part, la série suivante, qui représente une fonction entière de x, avec la période 2π :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{b^{2n}} \cos(b^n x), \qquad \text{où} \qquad 0 < a < 1, \qquad b = \text{entier impair} > 1,$$

montre la même propriété pour les mêmes valeurs de x. Mais en considérant les courbes, qui sont composées d'un nombre fini d'arcs analytiques, courbes qui se placent en quelque sorte entre les deux catégories extrêmes de fonctions mentionnées plus haut, et qui sont les plus importantes pour les applications, on trouve des circonstances entièrement différentes.

1. Pour traiter un cas déterminé et simple *prenons pour $f(x)$ un seul arc analytique, mais pour lequel $f(+0)$ et $f(2\pi-0)$ sont différents. Nous voulons démontrer que les sommes de Fourier sont oscillatoires autour de $f(x)$ pour chaque point de l'intervalle $(0, 2\pi)$, les arguments 0, π pouvant être les seuls exceptionnels.*

En effet

$$d_n(x) = s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)-f(x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}} \sin(2n+1)\frac{\alpha-x}{2}\,d\alpha.$$

Mais, en posant

$$(2) \qquad \eta_n(x) = \int_0^{2\pi} \varphi'(\alpha)\cos(2n+1)\frac{\alpha-x}{2}\,d\alpha,$$

où

$$\varphi(\alpha) = \frac{f(\alpha)-f(x)}{2\sin\frac{\alpha-x}{2}},$$

une intégration par partie donne

$$\eta_n(x) = -[\varphi(0)+\varphi(2\pi)]\cos(2n+1)\frac{x}{2} + \frac{2n+1}{2}\pi\, d_n(x);$$

et comme

$$\varphi(0)+\varphi(2\pi) = \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\sin\frac{x}{2}},$$

l'on obtient pour $d_n(x)$ l'expression

$$(3) \qquad d_n(x) = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(2\pi)-f(0)}{2}\,\frac{\cos(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \eta_n(x)\right].$$

Dans l'intégrale (2) la fonction $\varphi'(\alpha)$ est finie et continue entre 0 et 2π, par suite $\lim_{n=\infty} \eta_n(x) = 0$. Donc la formule (3) démontre d'une manière exacte, que la suite (1) est oscillatoire autour de $f(x)$ pour chaque valeur de x, excepté peut-être 0 et π.

L'exemple $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ montre que les valeurs 0 et π peuvent se présenter effectivement comme points d'exception.

2. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$ la série de Fourier de la fonction $f(x)$ que nous supposons telle qu'au n° 1.* Une transformation, analogue à la pré-

cédente, conduit aux expressions

$$a_{n+1}-a_n=\frac{f(2\pi)-f(0)+\varepsilon_n}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi},$$

$$b_{n+1}-b_n=\frac{-(2n+1)[f'(2\pi)-f'(0)]+\rho_n}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^3\pi},$$

où $n=1, 2, 3, \ldots, \infty$, $\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=\lim_{n=\infty}\rho_n=0$, qui prouvent immédiatement qu'*à partir d'un certain indice les a_n sont tous de même signe et vont en décroissant en valeur absolue, et que, en supposant $f'(2\pi)\neq f'(0)$, le même fait subsiste pour les b_n*. Cette méthode, qu'avait déjà appliquée M. Darboux pour la détermination de l'ordre des coefficients de la série de Fourier, mais en laissant de côté les questions relatives au signe, peut servir aussi pour traiter le problème d'oscillation dans le cas le plus général, signalé plus haut.

3. Qu'il me soit permis d'ajouter une remarque, qui se rattache aux considérations précédentes, et que je connais sans l'avoir publiée depuis trois années. *Soit $f(x)$ une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point x. Peut-on trouver une suite convergente, ayant $f(x)$ pour limite et dont les termes sont choisis parmi les termes de la suite divergente* (1)? *Pour démontrer que cela est toujours possible lorsque $f(x)$ est fini* dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, désignons par I et S les limites inférieure et supérieure de la suite (1) pour n infini. D'après mon théorème sur les moyennes arithmétiques, on a certainement $I\leqq f(x)\leqq S$. D'autre part $\lim_{n=\infty}(s_n-s_{n-1})=0$. Donc l'ensemble des termes de la suite (1), qui se trouvent entre I et S, est dense dans l'intervalle (I, S). D'où il résulte déjà l'existence de la suite voulue.

Le raisonnement est en défaut lorsque $f(x)$ devient *infini* comme dans l'exemple de Riemann $f(x)=\frac{d}{dx}\left(x^\nu \cos\frac{1}{x}\right)$, où $0<x\leqq 2\pi$, $0<\nu<\frac{1}{2}$. C'est de ce problème que s'occupent M. Hobson [1] et M. Lebesgue [2] dans leurs Notes intéressantes.

---

(1) *Proceedings of the London mathematical Society*, second serie, t. III, 1905.
(2) *Comptes rendus*, t. CXLI, 27 novembre 1905.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage d'un point dicritique.* Note de **M. H. Dulac**, présentée par M. Painlevé.

L'étude des intégrales d'une équation différentielle

$$X(x, y)\frac{dy}{dx} = Y(x, y)$$

dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$ supposé point multiple des courbes $X = 0$, $Y = 0$ peut toujours être faite complètement, *dans le champ réel*, ainsi que l'a montré M. Bendixson. Mais l'étude de ces mêmes intégrales, *dans le champ complexe,* n'a donné jusqu'ici que peu de résultats précis, si l'on en excepte la recherche des intégrales algébroïdes pour $x = 0$, problème complètement résolu. Si j'ai pu montrer qu'il y a, dans la plupart des cas, une infinité d'intégrales pour lesquelles y tend vers o avec x, ces intégrales présentent des singularités très diverses, qu'il paraît difficile d'étudier. En général, étant données des conditions initiales, x_0, y_0 aussi voisines que l'on veut de $x = 0$, $y = 0$, on ne sait comment se comporte l'intégrale relative à ces valeurs initiales, lorsque x tend vers o. On ne sait si cette intégrale possède un nombre fini ou infini de points critiques, dans le voisinage de $x = 0$. Dans le cas particulier où x est en facteur dans X, aucun théorème général ne permet d'affirmer que y tend vers une limite lorsque x tend vers o, et, en effet, y peut ne tendre vers aucune limite.

La difficulté de résoudre ces diverses questions, dans les cas les plus généraux, me paraît donner quelque intérêt aux résultats particuliers, mais très précis, que j'ai obtenus dans le cas d'un *point dicritique*. Considérons l'équation

$$(1)\qquad [xA(x, y) + \varphi_n(x, y) + \ldots]\frac{dy}{dx} = yA(x, y) + \psi_n(x, y) + \ldots$$

où le premier et le second membre contiennent des développements suivant les puissances de x et y. Nous n'écrivons que les termes de moindre degré, les polynomes homogènes A, φ_n, ψ_n de degrés respectifs $n - 2$, n et n.

Supposons qu'il n'y ait pas de valeurs de x et y annulant à la fois

$$(2)\qquad A(x, y) \quad \text{et} \quad y\varphi_n(x, y) + x\psi_n(x, y).$$

1° *On peut trouver un nombre* ε *tel que si l'on a* $|x_0| < \varepsilon$, $|y_0| < \varepsilon$, *l'intégrale de* (1) *correspondant aux conditions initiales* x_0, y_0 *est, pour* $|x| < |x_0|$, *ou bien holomorphe et tend vers* o *avec* x, *ou bien algébroïde et alors une au moins de ses déterminations tend vers* o *avec* x.

2° *Toutes les déterminations de l'intégrale considérée tendent vers* o *avec* x, *si* x *est en facteur dans le premier membre de* (1); *pour toute intégrale passant dans le voisinage de* $x = 0$, $y = 0$, y *tend vers* o *de quelque façon que* x *tende vers* o.

Les seules intégrales pour lesquelles x et y tendent vers o sont les intégrales algébroïdes (holomorphes en général) pour $x = 0$; l'existence de ces intégrales en nombre infini est bien connue, mais on ne s'était pas, à ma connaissance, occupé d'examiner si elles étaient les seules pour lesquelles x et y tendent vers o. De plus, 2° nous donne des conditions suffisantes pour que y tende vers o avec x; nous avons là un des exemples assez rares où, l'existence d'une limite pour y ne résultant pas du théorème de M. Painlevé : l'existence de cette limite de y, lorsque x tend vers o, *en variant dans le champ complexe*, est établie sans que l'équation (1) soit intégrée.

Ces résultats peuvent subsister partiellement, même s'il y a des valeurs de x et y annulant les deux polynomes (2). Ainsi le résultat 2° subsiste, pourvu que $A(x, y)$ ne contienne pas x en facteur.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'application de l'analyse de Dirichlet aux formes quadratiques à coefficients et à indéterminées conjuguées.* Note de M. **P. Fatou**, présentée par M. Painlevé.

Soit $ax\bar{x} + bx\bar{y} + \bar{b}\bar{x}y + cy\bar{y}$ une forme quadratique d'Hermite à variables et à coefficients entiers. Nous dirons qu'elle est primitive si, en posant $b = b_1 + ib_2$, les entiers réels (a, b_1, b_2, c) sont sans diviseur commun. Il y a lieu de distinguer entre les formes primitives de première espèce pour lesquelles les nombres $(a, 2b_1, 2b_2, c)$ sont premiers entre eux, et les formes primitives de seconde espèce pour lesquelles le plus grand commun diviseur de ces mêmes nombres est égal à 2; dans ce dernier cas, on a $D \equiv 1$, ou $D \equiv 2 \pmod 4$, suivant que b_1 et b_2 sont de parité différente ou tous deux impairs (D désignant l'invariant ou déterminant de la forme $b\bar{b} - ac = b_1^2 + b_2^2 - ac$).

Dans ce qui suit nous ne considérons que des formes positives de déterminant négatif, et, pour plus de simplicité, nous n'envisageons que les

classes de formes primitives de première espèce; soient $f, f', f'', \ldots$ des représentants des différentes classes de formes de cette espèce et de déterminant $-\Delta$. Les méthodes de Dirichlet permettent d'établir l'identité suivante :

$$(s>2) \quad \sum f(x, y, \bar{x}, \bar{y})^{-s} + \sum f'(x, y, \bar{x}, \bar{y})^{-s} + \ldots = \varkappa \sum \frac{1}{n^s} \cdot \sum \frac{1}{n^{s-1}},$$

les diverses sommations du premier membre étant étendues aux valeurs des entiers complexes x, y, pour lesquelles la forme correspondante représente un nombre premier à 2Δ, et les sommations du second membre aux entiers positifs n premiers à 2Δ; $\varkappa$ désigne le nombre de solutions de l'équation $t\bar{t} + \Delta u\bar{u} = 1$ ($\varkappa = 4$ en général, $\varkappa = 8$ pour $\Delta = 1$).

L'identité précédente est la traduction analytique du fait arithmétique suivant : *le nombre total de représentations d'un entier m premier à* 2Δ *par l'ensemble des formes f, f', ... est égal (au facteur* $\varkappa$ *près) à la somme de ses diviseurs*. Pour $\Delta = 1, 2, 3$, les formes correspondantes ne forment qu'une seule classe représentée respectivement par $x\bar{x} + y\bar{y}$, $x\bar{x} + 2y\bar{y}$, $x\bar{x} + 3y\bar{y}$: on en déduit le théorème de Jacobi sur le nombre de décompositions d'un nombre impair en une somme de 4 carrés, et deux théorèmes analogues découverts par Liouville.

Pour déduire de l'identité fondamentale qui précède l'expression du nombre de classes, il suffit de chercher les limites des deux membres, respectivement multipliés par $(s-2)$, quand s tend vers 2. On obtient les formules suivantes :

$$h(1) = 1,$$

$$(\Delta > 1) \qquad h(\Delta) = \frac{\Delta}{2} \prod \left[1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \frac{1}{p} \right],$$

le produit π étant étendu aux divers facteurs premiers impairs, p, de Δ.

La simplicité de ces formules mérite d'être remarquée. On en tire immédiatement cette conséquence que les seules valeurs de Δ pour lesquelles $h = 1$ sont : $\Delta = 1, 2, 3$.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie des spectres*. Note de M. **Ivar Fredholm**, présentée par M. H. Poincaré.

Dans une thèse récemment parue, M. Ritz a réussi le premier à construire un système mécanique dont les vibrations fondamentales obéissent

à des lois identiques à celles qu'on a trouvées pour les vibrations des raies spectrales de l'hydrogène et certaines raies d'autres éléments.

Le système mécanique trouvé par M. Ritz étant très compliqué et difficile à réaliser pour la pensée, il ne paraît pas sans intérêt de trouver d'autres systèmes analogues, mais d'une nature plus simple que celui de M. Ritz.

Voici comment on peut procéder :

Partons d'une matière continue étendue à trois dimensions. Appelons x, y, z les coordonnées rectangulaires d'une de ses particules et $w(t, x, y, z)$ l'élongation de sa position d'équilibre à l'époque t, en supposant, pour plus de simplicité, que chaque particule ne possède qu'un degré de liberté.

Supposons que la force F exercée sur cette particule par une autre soit donnée par la formule

$$F = \Phi(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)[w(\xi, \eta, \zeta) - w(x, y, z)].$$

Dans ces hypothèses, l'équation du mouvement du système s'écrit, en supposant que la densité soit constante,

$$(1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \iiint \Phi(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)[w(\xi, \eta, \zeta) - w(x, y, z)]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

En imposant à Φ la condition

$$\iiint \Phi(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = k,$$

où k est une constante différente de zéro, l'équation (1) s'écrit

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw = \iiint \Phi(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)\, w(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Une vibration fondamentale s'exprimant par

$$w = e^{i\lambda t} u(x, y, z),$$

on obtient pour u l'équation intégrale

$$(k - \lambda^2)\, u(x, y, z) = \iiint \Phi(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)\, w(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Or, pour que cette équation soit possible, il faut que $Z = \frac{1}{k - \lambda^2}$ soit un

zéro d'une certaine fonction entière $G(Z)$ dépendant de la fonction Φ et telle que $G(0) \neq 0$.

Ainsi, en appelant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, les racines de l'équation

$$G\left(\frac{1}{k - \lambda^2}\right) = 0,$$

on voit que les λ_i s'approchent de la limite $\sqrt{k}$.

Les systèmes considérés ici présentent ainsi le caractère commun que les longueurs d'onde de leurs vibrations fondamentales s'approchent d'une certaine limite non nulle.

Ensuite on peut démontrer sans difficulté qu'il est possible d'une infinité de manières de choisir la fonction φ tellement que les λ_i procèdent d'après une loi identique à celle des raies spectrales.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur les vibrations d'un corps élastique dont la surface est en repos.* Note de M. A. **Korn**, présentée par M. Émile Picard.

On peut démontrer le lemme suivant, dont un théorème très connu de M. Poincaré est un cas spécial :

Soient u_j, v_j, w_j $(j = 0, 1, 2, 3, \ldots, p)$ $p+1$ triplets de fonctions linéairement indépendants, continus avec leurs premières dérivées dans un domaine τ et s'annulant à la surface σ; on pourra toujours trouver $p+1$ constantes réelles $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2 = 1,$$

de manière que les fonctions

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} u &= \sum_0^p a_j u_j, & \pi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ v &= \sum_0^p a_j v_j, & \chi &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ w &= \sum_0^p a_j w_j, & \rho &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \\ & & \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

satisfassent à l'inégalité suivante

$$(3)\qquad \frac{\int_\tau (u^2+v^2+w^2)\,d\tau}{\int_\tau (\theta^2+\pi^2+\chi^2+\rho^2)\,d\tau} \leqq \frac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}},$$

où a représente une constante finie ne dépendant que du domaine τ.

A l'aide de ce lemme et de la démonstration de l'existence des solutions du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dont j'ai donné récemment les principes (*Comptes rendus*, 5 février), on peut démontrer d'une manière analogue à la méthode connue de M. Poincaré l'existence d'une infinité de triplets U_k, V_k, W_k continus avec leurs premières dérivées dans τ, satisfaisant aux équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta U_k + k\dfrac{\partial\Theta_k}{\partial x} + \lambda_k^2 U_k = 0, \\ \Delta V_k + k\dfrac{\partial\Theta_k}{\partial y} + \lambda_k^2 V_k = 0, \\ \Delta W_k + k\dfrac{\partial\Theta_k}{\partial z} + \lambda_k^2 W_k = 0, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\Theta_k = \frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{\partial V_k}{\partial y} + \frac{\partial W_k}{\partial z}, \\ &\int_\tau (U_k^2 + V_k^2 + W_k^2)\,d\tau = 1, \end{aligned}$$

et s'annulant à la surface σ. Dans ces équations nous désignons par k un nombre réel supérieur à -1, et les λ_k^2 sont des constantes positives

$$0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \ldots,$$

que nous appellerons *les nombres correspondants* aux triplets élastiques U_k, V_k, W_k.

Ces triplets élastiques jouent pour tous les problèmes de l'élasticité, dans lesquels la surface du corps élastique est supposée en repos, le même rôle que les fonctions harmoniques de M. Poincaré dans la théorie de l'équation

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = f.$$

Chaque triplet élastique correspond à une vibration d'un corps élastique dont la surface est en repos, et la durée de la vibration est proportionnelle au nombre λ_k.

Chaque triplet de fonctions u, v, w s'annulant à la surface σ et continues dans τ avec leurs dérivées premières et secondes peut être développé en

séries de la forme suivante :

$$(5)\qquad \begin{cases} u = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \ldots, \\ v = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \ldots, \\ w = C_1 W_1 + C_2 W_2 + \ldots, \end{cases}$$

et les constantes C_j de ces séries ont les valeurs

$$(6)\qquad C_j = \int_\tau (u U_j + v V_j + w W_j)\, d\tau.$$

Ces développements sont d'une importance très grande quand il s'agit de l'intégration des équations générales des corps élastiques isotropes

$$(7)\qquad \begin{cases} \Delta U + k \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \Delta V + k \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \Delta W + k \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \end{cases} \qquad \theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z},$$

ou des équations

$$(7')\qquad \begin{cases} \Delta U + k \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial U}{\partial t}, \\ \Delta V + k \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \mu \dfrac{\partial V}{\partial t}, \\ \Delta W + k \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = \mu \dfrac{\partial W}{\partial t}, \end{cases}$$

pour le cas où l'on suppose à la surface σ

$$(8)\qquad U = V = W = 0.$$

MÉCANIQUE RATIONNELLE. — *Sur un cas particulier du problème des n corps.* Note de M. **Thadée Banachiewitz**, présentée par M. H. Poincaré.

Considérons trois points matériels libres $P_i(m_i > 0;\ \xi^{(i)}, \eta^{(i)}, \zeta^{(i)})$, s'attirant proportionnellement aux masses et en raison inverse des cubes des distances mutuelles. Désignons par V la fonction des forces. On aura

$$(A)\qquad m_i \frac{d^2 \xi^{(i)}}{dt^2} = \frac{dV}{d\xi^{(i)}}, \quad m_i \frac{d^2 \eta^{(i)}}{dt^2} = \frac{dV}{d\eta^{(i)}}, \quad m_i \frac{d^2 \zeta^{(i)}}{dt^2} = \frac{dV}{d\zeta^{(i)}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Nous supposons dans tout ce qui suit que G, le centre de gravité du système, soit fixe.

Choisissons les axes des coordonnées de manière qu'on ait, pour $t=0$,

$$(a) \qquad \sum_i m_i \xi_0^{(i)} = 0, \qquad \sum_i m_i \eta_0^{(i)} = 0, \qquad \sum_i m_i \xi_0^{(i)} \eta_0^{(i)} = 0, \qquad \sum_i m_i \zeta_0^{(i)2} = 0.$$

Supposons qu'en même temps les points P_i soient les sommets d'un triangles, qui n'est pas équilatéral, et qu'il existe une relation

$$(b) \qquad \sum_i m_i \frac{\xi_0^{(i)} \eta_0^{(i)}}{(\Delta_{j,k})_0^4} = 0 \qquad (j,\ k \neq i),$$

où $(\Delta_{j,k})_0$ signifie la distance de P_j à P_k, pour $t=0$.

Posons

$$(c) \qquad \sum_i \xi_0^{(i)} \frac{dV_0}{d\xi_0^{(i)}} = -\nu_\xi \sum_i m_i \xi_0^{(i)2}, \qquad \sum_i \eta_0^{(i)} \frac{dV_0}{d\eta_0^{(i)}} = -\nu_\eta \sum_i m_i \eta_0^{(i)2};$$

ν_ξ et ν_η seront les nombres essentiellement positifs et inégaux.

On suppose

$$(d) \qquad \nu_\eta > \nu_\xi.$$

Introduisons deux constantes α', α'', liées par une équation

$$(e) \qquad (\alpha'' - \alpha')^2 = 4\nu_\xi,$$

et soit enfin

$$(f) \qquad k = \sqrt{(1+\alpha' t)(1+\alpha'' t)}.$$

Cela posé, voici une solution particulière des équations (A) :

$$(B) \qquad \begin{cases} \xi^{(i)} = k \xi_0^{(i)}, \\ \eta^{(i)} = k \eta_0^{(i)} \cos\left(\sqrt{\dfrac{\nu_\eta - \nu_\xi}{4\nu_\xi}} \log \dfrac{1+\alpha' t}{1+\alpha'' t}\right), \\ \zeta^{(i)} = k \eta_0^{(i)} \sin\left(\sqrt{\dfrac{\nu_\eta - \nu_\xi}{4\nu_\xi}} \log \dfrac{1+\alpha' t}{1+\alpha'' t}\right) \qquad (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

On déduira, en effet, des équations (B)

$$(1) \qquad \frac{d^2\xi^{(i)}}{dt^2} = -\frac{\xi^{(i)}}{k^4}\nu_\xi, \qquad \frac{d^2\eta^{(i)}}{dt^2} = -\frac{\eta^{(i)}}{k^4}\nu_\eta, \qquad \frac{d^2\zeta^{(i)}}{dt^2} = -\frac{\zeta^{(i)}}{k^4}\nu_\eta \qquad (i = 1, 2, 3);$$

mais on aura d'autre part

$$(2)\quad \frac{dV}{d\xi^{(i)}}=\frac{1}{k^4}\frac{\xi^{(i)}}{\xi_0^{(i)}}\frac{dV_0}{d\xi_0^{(i)}},\qquad \frac{dV}{d\eta^{(i)}}=\frac{1}{k^4}\frac{\eta^{(i)}}{\eta_0^{(i)}}\frac{dV_0}{d\eta_0^{(i)}},\qquad \frac{dV}{d\zeta^{(i)}}=\frac{1}{k^4}\frac{\zeta^{(i)}}{\eta_0^{(i)}}\frac{dV_0}{d\eta_0^{(i)}}$$

$$(i=1, 2, 3).$$

Or, toutes les expressions

$$m_i\xi_0^{(i)}\nu_\xi+\frac{dV_0}{d\xi_0^{(i)}}\quad \text{et}\quad m_i\eta_0^{(i)}\nu_\eta+\frac{dV_0}{d\eta_0^{(i)}}\qquad (i=1, 2, 3)$$

s'évanouissent; les équations (A) sont donc satisfaites par (B).

Le mouvement, représenté par les formules (B), se fera de sorte que le triangle des points tournera autour d'un axe fixe G_ξ sans changer ses angles. Chaque point P_i se mouvra sur la surface d'un cône de révolution, ayant pour sommet G et pour axe G_ξ. Sa projection sur le plan $\eta G\zeta$ glissera sur une spirale, dont l'équation en coordonnées polaires (ρ, ω), G étant pris pour pôle, pourra s'écrire

$$\left.\begin{array}{l}\rho \sin\text{hyp}\,\mu\omega\\ \rho\cos\text{hyp}\,\mu\omega\end{array}\right\}=c^2\quad \begin{array}{ll}\text{lorsque} & \alpha'\alpha''>0,\\ \quad » & \alpha'\alpha''<0,\end{array}\qquad \text{(la spirale de Poinsot)},$$

$$\log\rho=\mu\omega\qquad » \qquad \alpha'\alpha''=0,\ \eta_0^{(i)}\neq 0\ \text{(la spirale logarithmique)},$$

où l'on a posé

$$c^2=\pm\eta_0^{(i)}\sqrt{\pm\frac{\nu_\xi}{\alpha'\alpha''}},\qquad \mu=\sqrt{\frac{\nu_\xi}{\nu_\eta-\nu_\xi}}.$$

On voit que *les points* P_i *décriront les courbes gauches;* c'est ce qui n'arrive pas dans les solutions exactes du problème, connues jusqu'à présent.

Le cas exposé est dans l'exception fort remarquable : j'affirme que, *si le système des n corps, s'attirant proportionnellement aux masses et à la puissance quelconque des distances* mutuelles, *se meut de sorte que les distances gardent entre elles des rapports constants,* les points ne pourront décrire que des courbes planes et, en conséquence, *la configuration devra être centrale* [1] *excepté le cas ci-dessus* (et son extension éventuelle au cas $n>3$, l'attraction variant en raison inverse du cube de la distance).

Voilà comment on peut généraliser le théorème dû à Lagrange et qui n'était établi que pour *trois* corps, s'attirant conformément à la loi de Newton.

---

(1) Voir, pour la définition, l'article de M. Driobek, *Astr. Nachr.*, 3627.

PHYSIQUE. — *Sur la signification exacte du principe de Carnot.* Note de M. **Louis Fredey**, présentée par M. P. Curie.

Boltzmann, étudiant les conséquences du principe de Carnot, fait une distinction entre les mouvements ordonnés et les mouvements non ordonnés. Cette distinction est commode, mais ce n'est évidemment qu'une image. D'une façon tout à fait générale, il n'y a pas de mouvements non ordonnés. Deux électrons circulant dans le même sens constitueraient un système ordonné, par rapport à deux électrons circulant en sens contraire ou seulement divergents. Les divers mouvements possibles des deux électrons l'un vis-à-vis de l'autre nous mettraient en présence de systèmes sans nombre plus ou moins ordonnés les uns que les autres. Les durées relatives des mouvements impliquent à leur tour des gradations.

Si nous passons du cas de deux électrons à des cas de plus en plus généraux, nous nous trouvons devant des possibilités incalculables de systèmes plus ou moins ordonnés.

Passons sur ces difficultés. Attribuons l'ordre à des mouvements ayant une grandeur et une durée appréciables par rapport à notre propre grandeur et à notre propre durée. Nous pourrons poser les règles suivantes :

1° Toutes choses égales, la formation de systèmes ordonnés est d'autant moins fréquente que les systèmes ont plus d'amplitude;

2° Toutes choses égales, la formation des systèmes ordonnés est d'autant moins fréquente que les systèmes sont plus complexes.

On entrevoit corrélativement que la destruction d'un système sera compensée d'autant plus tardivement par la reconstruction d'un système équivalent que ce système sera plus considérable et plus complexe. La dégradation apparente d'énergie serait donc inévitable. Aucun système ne se reformerait spontanément. Il faudra faire un emprunt à l'ambiance. Mais cela signifie-t-il que les mouvements ordonnés diminuent par rapport aux mouvements non ordonnés?

Les règles énoncées ci-dessus ne permettent pas cette conclusion. De ce que les combinaisons ordonnées deviennent de plus en plus rares à mesure qu'elles ont plus d'amplitude et de complexité, il faut conclure que les éléments dont elles se forment ne se réunissent pas spontanément ni instantanément; ils s'assemblent et s'orientent à la suite d'une sélection dans

l'espace et dans le temps. Si donc ces combinaisons se détruisent, leurs équivalents ne se reforment également qu'à la suite d'une sélection dans le temps et dans l'espace, sélection d'autant plus difficile et plus lente que les systèmes seront plus vastes et mieux ordonnés. Nécessairement les systèmes ne peuvent se reformer d'eux-mêmes. Si une incidence écarte, fait diverger deux électrons qui circulaient parallèlement, pourront-ils reprendre spontanément leur position et leur marche primitives? Il est impossible de l'imaginer. Il est également impossible de l'imaginer pour trois, quatre, dix, cent, mille, ..., n électrons : aussi, du moment qu'un système isolé varie, a-t-on pu poser qu'il ne repasserait pas deux fois par le même état (¹)? *Cela est aussi vrai pour les groupements non ordonnés que pour les systèmes ordonnés.* Si l'on pouvait rapporter à des axes fixes, à l'instant t, la position des particules d'un groupement désordonné, on ne voit pas que ce groupement, après variation, puisse spontanément reprendre ses positions primitives plutôt que ne le pourrait un système ordonné. On tirerait donc le principe de Carnot de l'observation des mouvements non ordonnés comme des mouvements ordonnés, si l'on pouvait déterminer ceux-ci comme ceux-là. Mais, par définition, on ne le peut pas. Aussi sommes-nous enclins à opposer directement un système ordonné à tous les genres de mouvements que nous croyons désordonnés.

En réalité, il n'y a aucune différence *fondamentale* ni entre les petits et les grands systèmes, ni même entre les systèmes ordonnés et les groupements non ordonnés.

Si un soleil se détruit, il ne se reformera pas sur place, mais sa destruction peut être compensée par des formations équivalentes. Il y faudra nécessairement beaucoup de temps et beaucoup d'espace. Si quelques mouvements d'ordre atomique se disloquent, ils ne se reformeront pas non plus sur place, mais ils pourront se reformer à un micron de distance et presque instantanément. On en déduit que la dislocation d'un mouvement quelque peu considérable tendra à s'éparpiller en mouvements moléculaires et que, en retour, de nombreux mouvements moléculaires ne formeront que peu de systèmes cohérents. La persistance du dénivellement universel dépend d'une proportion entre ces processus en apparence opposés : *pour que des mouvements d'ordre quelconque se maintiennent, il*

(¹) C'est, on le voit, un corollaire du principe d'inertie, qui lui-même est l'aspect le plus caractéristique du principe général de détermination.

faut et il suffit que le degré de fréquence de leur destruction soit équivalent au degré de fréquence de leur réapparition.

Au sein de l'immense réservoir des différenciations infinitésimales, base de tous les mouvements de l'univers, nous voyons, de-ci de-là, apparaître des systèmes assez amples, assez définis pour que nous puissions en prendre une connaissance relativement précise. Nous assistons sans cesse à des formations de cette espèce, dont quelques-unes offrent une complexité étonnante. Toutes sortent du grand réservoir confus et y rentreront. Pour avoir du principe de Carnot une idée exacte, il faut cesser de les opposer directement à ce réservoir générateur, il faut cesser d'opposer un petit groupe de séries, et fort limitées, à des séries sans nombre. Dès lors, on rejettera la conséquence de la dégradation de l'énergie, dont on pourra toutefois tirer une règle empirique, se rapportant au degré d'exception des phénomènes.

En somme, le principe de Carnot dépend d'une statistique si nous l'envisageons sous un aspect unilatéral. Mais il se prêterait à une extension universelle si nous pouvions concevoir tous les circulus de l'énergie, et deviendrait une des lois les plus constantes qu'ait entrevues l'intelligence humaine. Puisque, au fond, il serait le principe d'inertie envisagé dans son application aux groupements, on ne pourrait lui imposer aucune restriction. Il s'opposerait à tout retour *spontané* des phénomènes, mais admettrait pourtant, grâce à l'interaction des choses, tous les ordres de retour, tous les genres de répétition [1].

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur l'acide lactique gauche.*
Note de MM. E. JUNGFLEISCH et M. GODCHOT.

Le peu que nous savons sur l'acide lactique gauche ne s'est pas augmenté depuis la découverte de ce corps par M. Schardinger en 1883. La séparation du lactate-$(d+l)$ de quinine en ses composants étant devenue relativement facile (E. JUNGFLEISCH, *Comptes rendus*, t. CXXXIX, p. 56), nous avons développé l'étude de cet acide. La constatation de différences marquées [2], entre l'acide lactique-l et l'acide lactique-d, dans leurs trans-

---

(1) On sait que Boltzmann, dans ses *Leçons sur la théorie des gaz*, a précisé la relativité des conclusions qu'on peut tirer du principe de Carnot.

(2) Un travail de M. A. Mackenzie (*Journ. of the Chem. Soc.*, t. LXXXVII, sep-

formations en acide lactique-$(d+l)$ sous l'action des mêmes agents (E. Jungfleisch, *Comptes rendus*, t. CXXXIX, p. 203), nous a paru donner un certain intérêt général à cette étude.

Dans toutes nos expériences, l'acide lactique-l s'est montré beaucoup plus facilement transformable que l'acide lactique-d, en acide lactique-$(d+l)$. Ce fait impose des ménagements particuliers lors de sa préparation. La lactate-l de quinine pur a été changé en sel de zinc de la manière indiquée pour le lactate-d (*Comptes rendus*, t. CXL, p. 719), mais en ayant soin de maintenir, pendant le traitement, le liquide au voisinage de 0° et d'éviter soigneusement tout excès de baryte. Malgré ces précautions, les premiers cristaux obtenus contiennent toujours une certaine proportion de lactate-$(d+l)$ de zinc, pouvant atteindre un dixième; les solubilités des deux lactates sont telles que les cristaux qui viennent ensuite sont beaucoup plus riches en lactate-l.

On sépare les deux lactates par des cristallisations fractionnées, que l'on dirige en observant au microscope les formes très différentes du lactate-$(d+l)$ et du lactate-l. On parvient ainsi à recueillir du lactate-l de zinc tout à fait pur. Le lactate-l de zinc ressemble beaucoup au lactate-d. Les cristaux présentent au microscope la même apparence. Les solubilités sont voisines. Le pouvoir rotatoire à droite du lactate-l de zinc dissous dans l'eau augmente fortement avec la dilution : les solutions contenant respectivement 5^g, $2^g,50$, $1^g,25$ et $0^g,512$ de sel sec dans 100^{cm^3} de liqueur, nous avons observé, à 12° : $\alpha_D = +5°,66$, $\alpha_D = +8°,00$ $\alpha_D = +10°,00$ et $\alpha_D = +12°,5$; avec des directions opposées, ces pouvoirs rotatoires sont voisins de ceux que nous avons trouvés pour le lactate-d de zinc.

La production de l'acide lactique-l, en partant de son sel de zinc, a été réalisée par les procédés que nous avons appliqués antérieurement au lactate-d de zinc.

---

tembre 1905, p. 1373) contient les lignes suivantes au sujet de la Note de M. Jungfleisch : « Sa conclusion, primitivement énoncée, que les acides lactiques-l et -d sont racémisés à des degrés différents par un agent symétrique comme la baryte, fut déclarée erronée tout récemment par Godchot et lui-même (*Comptes rendus*, t. CXL, 1905, p. 719) ». L'auteur indique ensuite ses propres expériences établissant l'exactitude de la conclusion. Notre erratum du 13 mars 1905 (*loc. cit.*, p. 720) dit seulement, en quatre lignes que : « les chiffres cités pour les comparaisons de pouvoirs rotatoires doivent être rectifiés afin de représenter exactement les valeurs de α_D; la série de mesures à laquelle ils appartiennent ayant été lue sur une échelle saccharimétrique, ils doivent être multipliés par le facteur constant 4,332 ». Cette rectification de chiffres ne modifiait évidemment pas les rapports entre les nombres; elle augmentait même la valeur absolue des différences que M. Mackenzie déclare qu'elle a annulées. Le travail de M. Mackenzie confirme donc, et en employant les mêmes réactions, celles de M. Jungfleisch; celui-ci n'a jamais déclaré erronée sa proposition primitive : l'acide lactique droit et l'acide lactique gauche ne se conduisent pas semblablement dans les réactions.

La pureté du produit obtenu nous a permis de préparer l'acide lactique-l cristallisé. La solution aqueuse ayant été évaporée à froid, pour éviter la formation abondante d'acide lactyllactique-l, qui s'observe à chaud, on soumet le liquide à une dessiccation opérée à 30° dans le vide, avec rentrée d'air sec, jusqu'à ce que le produit ne perde plus d'eau; on enferme aussitôt l'acide dans un tube scellé, qu'on refroidit à $-10°$ pendant plusieurs jours. La matière sirupeuse, peu fluide, cristallise nettement en prismes aplatis, lamelleux, mélangés de cristaux bien développés et fort analogues comme apparence à ceux que nous avons obtenus avec l'acide lactique-d. Les cristaux sont extrêmement hygroscopiques; essorés autant que possible à l'abri de l'humidité, ils fondent à 26°-27° environ; nous avons indiqué 25°-26° environ pour l'acide lactique-d. MM. Krafft et Dye ont donné 18° pour l'acide lactique-$(d+l)$.

La solution aqueuse de l'acide lactique-l le plus pur présente un pouvoir rotatoire lévogyre, qui diminue quand la dilution augmente : des liqueurs contenant respectivement, dans 100^{cm^3}, $4^g,856$ et $2^g,428$, ont donné à 12°, $\alpha_D = -2°,90$ et $\alpha_D = -2°,25$. Nous avons constaté un fait semblable pour l'acide lactique-d; pour les deux corps, en opérant de même et à la même concentration, les valeurs de α_D sont sensiblement égales et de signes contraires. Une liqueur aqueuse contenant, dans 100^{cm^3}, $1^g,2371$ d'acide lactique-l cristallisé, dissous à froid, a donné immédiatement $\alpha_D = -2°,26$, c'est-à-dire un nombre sensiblement plus fort. Ce fait reproduit notre observation sur l'acide lactique-d; il s'explique par la présence d'un peu d'acide lactyllactique-l dans l'acide lactique-l sirupeux.

Comme l'acide lactique-$(d+l)$ et l'acide lactique-d, en effet, l'acide lactique-l se combine à lui-même, spontanément, dans ses solutions aqueuses concentrées, en formant l'acide lactyllactique-l. Celui-ci ayant un pouvoir rotatoire dextrogyre, c'est-à-dire inverse de celui de l'acide lactique-l, mais beaucoup plus considérable, sa présence peut entraîner un renversement du sens du pouvoir rotatoire pour le mélange. C'est ainsi que, si l'on concentre jusqu'à consistance sirupeuse, au bain-marie, une solution d'acide lactique-l lévogyre, elle se charge d'acide lactyllactique-l très fortement dextrogyre; on la laisse refroidir, on l'étend d'eau froide et on l'observe aussitôt au polarimètre. Une telle solution contenant, dans 100^{cm^3}, $22^g,1$ d'acide lactique-l plus ou moins éthérifié, nous a donné une déviation à droite considérable : $\alpha_D = +6°,03$, calculé pour l'acide lactique; la même solution étant ensuite maintenue au bain-marie, pendant

plusieurs heures, en vase fermé est devenue lévogyre : $\alpha_D = -1°,02$; c'est que l'eau chaude a hydrolysé en grande partie l'acide lactyllactique-*l* dextrogyre et l'a changé en acide lactique-*l* lévogyre ; le sens de la déviation a été renversé.

Si l'on ajoute que les solutions d'acide lactique-*l*, chargées d'acide lactyllactique-*l*, peuvent donner des liqueurs contenant à la fois les sels de zinc des deux acides, que le lactyllactate-*l* de zinc a un pouvoir rotatoire à droite beaucoup plus considérable que celui du lactate-*l* de zinc, on est conduit à penser que ces faits, analogues à ceux que nous avons observés pour l'acide lactique-*d*, peuvent avoir une influence sur la détermination exacte de la nature des acides lactiques résultant des nombreuses fermentations microbiennes.

CRYPTOGAMIE. — *Sur les kystes des* Glœosporium *et sur leur rôle dans l'origine des levures*. Note de MM. **P. Viala** et **P. Pacottet**, présentée par M. L. Guignard.

La culture en milieux artificiels des *Glœosporium ampelophagum* Saccardo (*Manginia ampelina* Viala et Pacottet) et *Glœosporium nervisequum* Saccardo (*Gnomonia Veneta* Klebahn) a révélé un polymorphisme [1] très complexe pour ces deux espèces parasites de la Vigne ou du Platane : conceptacles divers, périthèces, conidiophores, sclérotes, levures et kystes. Ces dernières formes, les *kystes*, ne rappellent en rien celles connues pour les Champignons ; leur relation avec les autres organes de reproduction a été vérifiée, pour les deux espèces, par des cultures méthodiques répétées.

Les kystes du *G. ampelophagum*, observés d'abord en culture et reproduits à volonté par modification des milieux, ont été retrouvés ensuite dans la nature, dès l'automne, sur les chancres des sarments anthracnosés. Les kystes du *G. nervisequum* se développent dans les mêmes conditions de milieu (bouillon de carottes acide, bouillon de riz, lait gélosé, etc.), que le premier ensemencement provienne de spermaties ou de conidies, de stylospores, etc.

Le voile mycélien qui s'étale à la surface des cultures donne d'abord quelques rares

---

(1) Voir *Comptes rendus*, 19 février 1906.

spermogonies, puis la trame s'épaissit et se fonce en noir; elle est dense (bouillon de carotte acide, etc.) ou floconneuse (bouillon de riz, etc.). Certains articles, sur le parcours des filaments mycéliens très cloisonnés, se renflent et ces renflements sont le début des kystes. Le noyau se divise en deux, puis en quatre ou un plus grand nombre de noyaux secondaires, qui sont l'origine, dans le kyste qui grossit, de spores endogènes à membrane propre dans l'enveloppe commune qui les renferme. Les kystes, à leur complet développement, sont rarement monosporés, le plus souvent plurisporés; la membrane générale noire et cassante finit par se rompre et les spores internes sont mises en liberté. Les masses kystiques, plus ou moins volumineuses sur le filament mycélien producteur, incolore ou peu foncé, ou brun, parfois latérales à ce filament, ont des caractères spécifiques pour les deux espèces de *Glœosporium* étudiés.

Les kystes plurisporés du *G. ampelophagum* mesurent de 15$^{\mu}$ à 40$^{\mu}$; les monospores, rares, ont de 8$^{\mu}$ à 12$^{\mu}$. Les spores kystiques sont un peu allongées, subovoïdes, de dimensions assez régulières (8$^{\mu}$ à 10$^{\mu}$ de long); leur membrane propre est fuligineuse. L'enveloppe du kyste est lisse. Par contre, celle des kystes du *G. nervisequum*, très foncée, est comme craquelée, à la surface rugueuse, carbonacée. Les spores endogènes (les kystes sont presque toujours polysporés) sont plus sphériques, moins allongées que celles du *G. ampelophagum;* leur membrane est incolore ou à peine teintée; elles ont de 8$^{\mu}$ à 14$^{\mu}$ de diamètre. Les kystes mesurent en moyenne 30$^{\mu}$, les plus gros ont 45$^{\mu}$ de long; leurs dimensions varient de 14$^{\mu}$ (kystes monosporés) à 25$^{\mu}$ en diamètre.

L'épuisement des milieux, où végètent dans leur forme mycélienne les *Glœosporium,* les conditions nutritives défavorables à leur végétation (acidité, addition d'alcool à 2 pour 100, etc.), la sécheresse extérieure ou la dessiccation progressive des cultures, constituent des facteurs déterminants de la production des kystes. On hâte encore leur formation en soumettant les cultures à de brusques abaissements de température et en les maintenant ensuite à des températures assez basses (25° à 12° et 10°); l'exposition de ces cultures en pleine lumière accentue aussi le développement de ces organes.

Les spores endogènes, sorties des kystes, germent directement en filaments mycéliens très cloisonnés, à éléments courts et en boudins. En milieux sucrés, ces articles se séparent aussitôt et se mettent à bourgeonner en donnant des levures; en milieu peu ou pas sucré (bouillon de haricot, par exemple, et jus de feuille de Platane ou de Vigne suivant l'espèce), le mycélium très variqueux finit par s'effiler et se multiplier en trame mycélienne productrice définitivement de spermogonies.

Le kyste des *Glœosporium* est un organe à spores endogènes d'une très grande résistance aux agents atmosphériques. Il représente, par sa nature morphologique et par rapport au mycélium, ce que sont les levures sporu-

lées pour les levures bourgeonnantes. La propriété qu'ont des spores endogènes du kyste de tendre, presque aussitôt, dans les milieux favorables, aux formes levures, permet de se demander s'il ne représente pas l'état transitoire du Champignon filamenteux vers la levure.

ZOOLOGIE. — Stellosphæra mirabilis, *nouvelle larve d'Astérie appartenant très vraisemblablement à une forme abyssale.* Note de MM. **R. Kœhler** et **C. Vaney**, présentée par M. Alfred Giard.

La larve que nous décrivons dans cette Note a été recueillie par S. A. S. le Prince de Monaco dans des pêches pélagiques pratiquées, dans les parages des Açores, jusqu'à 2000^{m} et 3000^{m} de profondeur, au moyen du filet vertical à large ouverture du Dr Richard. Elle ne ressemble à aucune larve connue d'Echinodermes; et, bien plus, en ne considérant que sa forme sphéroïdale et ses caractères extérieurs, on serait d'abord tenté de le rapporter à un tout autre groupe qu'aux Echinodermes. Fort heureusement, la présence de pédicellaires fixe immédiatement la position systématique de ce curieux organisme. Et comme ces pédicellaires, qui sont croisés, sont identiques à ceux qu'on observe dans les Astéries du groupe des Forcipulés et que de tels pédicellaires ne se rencontrent nulle part ailleurs que dans ce groupe, nous sommes fondés à dire que la *Stellosphæra* est une larve d'Astérie.

Le corps est presque sphérique, mais l'un des pôles, au milieu duquel s'ouvre la bouche, est légèrement aplati. Le diamètre atteint environ 3^{mm}. Au stade le plus jeune que nous ayons pu examiner, le caractère extérieur le plus curieux qu'offre cette larve est la présence de nombreux corpuscules calcaires en forme de piquants et réunis par groupes en certains points déterminés de la surface du corps. On distingue d'abord six groupes principaux de ces piquants placés à égale distance les uns des autres sur l'équateur de la larve et donnant ainsi à celle-ci l'apparence d'une symétrie hexaradiée. Chaque groupe se compose de six à huit piquants plus ou moins inclinés et s'insérant sur une plaque calcaire réticulée. Ces plaques supportent, en outre, quelques pédicellaires croisés. Indépendamment de ces six faisceaux équatoriaux, on en distingue d'autres moins importants, vers le pôle aboral : l'un de ceux-ci, composé d'un simple piquant et supporté par une petite plaque calcaire, occupe exactement le sommet de la larve. Autour de cette sorte de plaque centro-dorsale, se montrent cinq autres plaques placées suivant un petit cercle; celles-ci sont plus petites que les plaques équatoriales et elles supportent chacune un ou deux piquants et un pédicellaire. La bouche est aplatie et elle offre vers chaque extrémité un tentacule creux.

Le seul organe interne que l'on puisse distinguer est le tube digestif qui décrit deux tours de spire et dont la région œsophagienne offre deux diverticules latéraux. L'anus est légèrement déjeté de côté par rapport à la plaque centro-dorsale.

A un stade plus avancé du développement, les plaques calcaires et les piquants qu'elles portent se résorbent. A la place des plaques équatoriales, on observe un nombre égal de coussinets rectangulaires supportant chacun cinq à sept tubérosités souvent disposées par paires et représentant les restes des aspérités formées par les piquants. Sur les coupes on retrouve encore quelques fragments de calcaire, mais celui-ci est résorbé en grande partie. A la base de chaque coussinet, deux paires de digitations plus ou moins aplaties ont fait leur apparition. Les plaques calcaires du pôle aboral ont aussi disparu et l'on ne distingue plus dans cette région qu'une papille centro-dorsale entourée de cinq autres petites papilles. Quant aux pédicellaires, ils ne paraissent subir aucune modification, car ils se retrouvent sur les larves âgées, avec les mêmes caractères et la même disposition que sur les larves plus jeunes.

Il ne peut y avoir de doute sur la nature de la *Stellosphæra :* c'est une larve d'Astérie, comme le prouve la présence de pédicellaires forcipulés. Nous n'avons pas besoin d'insister sur les différences qui la séparent des autres larves d'Echinodermes. Ces différences sautent aux yeux et elles sont si marquées, que si les pédicellaires ne venaient pas fixer d'une manière indubitable la position de cette larve, on accepterait difficilement l'idée de la rapporter aux Echinodermes. Les dissemblances sont si grandes qu'il n'y a pas à faire de comparaisons. Notons cependant un caractère remarquable de la *Stellosphæra :* c'est la symétrie hexaradiée qui se manifeste par les six groupes de plaques équatoriales et qui persiste, après la disparition des plaques et des piquants, dans les six coussinets qui les remplacent. La symétrie pentaradiée ne se manifeste que par la disposition des plaques secondaires du pôle aboral. Enfin d'autres caractères, tels que la présence de deux tentacules buccaux et la forme aplatie de la bouche, montrent une orientation nettement bilatérale. Nous trouvons donc à la fois, dans le même organisme, des symétries hexaradiée, pentaradiée et bilatérale.

Nous ne pouvons pas affirmer d'une manière absolue que notre larve appartienne à une forme abyssale puisque les pêches qui l'ont fournie ont été faites entre 2000^m ou 3000^m et la surface. Il y a de très grandes chances pour que les larves aient été capturées à une grande profondeur, mais on peut objecter que, le filet restant ouvert, rien n'empêchait les animaux pélagiques superficiels d'y pénétrer. Cette hypothèse est très peu vraisemblable. Nous savons en effet que les larves d'Echinodermes connues jusqu'à ce jour se rencontrent à peu près exclusivement au voisinage des côtes et

dans les couches superficielles des eaux. Elles appartiennent aux formes bien connues : *Auricularia, Bipinnaria, Brachiolaria* ou *Pluteus* et se rapportent à des espèces littorales. Or il se trouve que la *Stellosphæra* a été recueillie dans une pêche bathypélagique, en pleine mer, loin des côtes, dans un filet descendu à 2000^{m} ou 3000^{m} de profondeur. On conviendra que, dans ces conditions, il est bien permis d'admettre que cette larve, *qui se présente avec des caractères absolument nouveaux* et ne rappelant en rien ceux des larves superficielles connues, provienne effectivement d'une grande profondeur et appartienne à une Astérie abyssale : cela est infiniment probable.

La découverte de la *Stellosphæra* offre donc un intérêt considérable et elle jette un jour nouveau sur l'histoire du développement des Echinodermes abyssaux qui nous est totalement inconnu, en nous montrant que certains d'entre eux, tout au moins, peuvent se développer au dépens de larves.

PHYSIOLOGIE. — *Effets reconstituants de la viande crue après le jeûne.* Note de M. Charles Richet, présentée par M. Dastre.

J'ai pu montrer que l'alimentation par la viande crue et par le plasma musculaire, mode de traitement que j'ai appelé *zomothérapie* était d'une efficacité remarquable dans le traitement de la tuberculose expérimentale (*Comptes rendus*, t. CXXX, 26 février 1900). Dans les expériences qui vont suivre, il s'agit non d'un traitement diététique appliqué spécialement à la tuberculose, mais des conditions d'alimentation suivant lesquelles un organisme répare le mieux ses tissus après inanition.

Là encore, la viande crue est un aliment supérieur à tous autres.

L'observation porte sur sept groupes, de quatre chiens chaque, ainsi répartis, au point de vue alimentaire.

I. Viande cuite et bouillie alternativement.
II. Viande cuite et viande crue alternativement.
III. Viande cuite et fromage lacté alternativement.
IV. Jeûne et viande cuite alternativement.
V. Jeûne et viande crue alternativement.
VI. Jeûne et bouillie alternativement.
VII. Jeûne et fromage lacté alternativement.

Chacune de ces périodes alternantes était de 5 jours. La viande cuite et la viande

crue étaient de la viande de cheval. La bouillie est un mélange de riz cuit, de lait et de sucre de canne. Le fromage lacté est du fromage de Gruyère cuit avec du lait.

Il y avait 4 chiens pour chaque groupe, sauf le groupe VII, constitué par trois chiens seulement.

L'expérience a commencé le 10 août 1905, et je l'ai arrêtée 6 mois après au 1er février 1906.

Signalons d'abord ce fait assez imprévu que les chiens peuvent supporter pendant plusieurs mois des alternances de 5 jours de jeûne et 5 jours d'alimentation. Ils finissent par s'y habituer et ne semblent pas en souffrir. (Sur des herbivores l'effet eût été tout autre.) Dans les cinq premières séries il n'y a que deux morts, accidentelles, au début, et les deux chiens morts ont pu être remplacés.

Dans le groupe VI la mortalité a été *totale;* c'est-à-dire que l'alimentation par la bouillie, après le jeûne, n'a pas pu réparer l'organisme inanitié. Les quatre chiens en expérience sont morts tous les quatre, aux 35e, 36e, 60e et 83e jours. Donc, après le jeûne, il faut une alimentation réparatrice riche en azote. La bouillie de riz, sucre et lait (qui ne contient que 4 pour 100 de son poids en matières protéiques) suffit à entretenir la vie normale des chiens) mais elle devient insuffisante quand il s'agit de reconstituer leurs tissus après le jeûne.

De même le fromage lacté (quoiqu'il contienne 32 pour 100 de matières protéiques) n'est pas un aliment réparateur. Sur trois chiens expérimentés, deux sont morts, aux 71e et 175e jours. Le troisième est encore en bonne santé.

Les chiens des groupes I, II, III sont en excellent état. Mais il faut comparer les effets différents de l'alimentation après 5 jours de jeûne chez les chiens alimentés à la viande crue (groupe V) et à la viande cuite (groupe IV).

	Moyenne des poids.	
	Viande cuite et jeûne.	Viande crue et jeûne.
Au début	100	100
Au 40e jour	90	92
Au 80e jour	83	90
Au 120e jour	83	96
Au 160e jour	82	98
Au 175e jour	81	96

Si l'on fait la moyenne centésimale des pertes subies par l'animal qui a

jeûné 5 jours et des gains en poids de ce même animal pendant les 5 jours d'alimentation consécutive, on a

	Viande cuite et jeûne.	Viande crue et jeûne.	Bouillie et jeûne.
Moyenne des pertes........	8,8	9,6	9,0
Moyenne des gains	7,1	9,4	4,5
Différence.....	— 1,7	— 0,2	— 4,5

Dans le groupe II, la moyenne des poids après les 5 jours de viande crue donne un excédent de + 2,34 pour 100 ; après les 5 jours de viande cuite, il y a un excédent de pertes de — 0,34 pour 100.

Ainsi, pour ramener après l'inanition l'organisme à son état antérieur, la viande crue est l'aliment le plus efficace, et même, dans les conditions où nous nous étions placés, c'est-à-dire des alternances de 5 jours, le seul efficace. Ce n'est pas seulement la *quantité* de l'azote alimentaire qui influe, mais sa *qualité*, et il semble bien que la cuisson fasse perdre à la viande une partie de ses propriétés reconstituantes et nutritives.

MÉDECINE. — *Étude des variations de la toxicité du contenu de l'intestin grêle. Modifications du sang*. Note de MM. Charrin et Le Play, présentée par M. d'Arsonval.

De nombreuses expériences établissent que la toxicité du contenu intestinal subit de nombreuses variations. En particulier, son maximum se déplace sous l'influence du titre des dilutions; quand, par exemple, à une partie de ce contenu on ajoute trois parties d'eau salée physiologique, ce maximum s'obtient en injectant les principes renfermés dans le segment terminal de l'iléon ou le commencement des côlons. Si, par contre, on réduit cette dilution (trois de matières intestinales pour une de sérum artificiel), ce sont, comme l'a vu Asleben, les produits extraits du duodénum ou de la première moitié du grêle qui se montrent les plus nuisibles. A vrai dire, ainsi concentré, le mélange est assez sirupeux et, en troublant l'osmose ou autrement, cet état physique joue peut-être un rôle. On conçoit, du reste, qu'en modifiant ces dilutions on change la solubilité de certains corps, les teneurs en sels, en albuminoïdes, etc.

En tout cas, dans l'ensemble de ces variations, sauf pour quelques élé-

ments capables de modifier le sang, la part de la chaleur est médiocre. D'un autre côté, dans les conditions où nous nous sommes placés, on ne saurait rapporter les principaux accidents à la concentration moléculaire, attendu que la cryoscopie établit que la gravité de ces accidents n'est pas rigoureusement proportionnelle aux oscillations de cette concentration.

Dans la genèse de ces variations toxiques, nul ne conteste le rôle évident par lui-même des aliments, rôle démontré soit indirectement, soit directement, récemment encore par Asleben.

Toutefois, il est manifeste que les matières de l'estomac sont moins nocives que celles du segment supérieur de l'intestin grêle. Cette constatation démontre l'importance des modifications réalisées au niveau de ce segment : aussi, au premier abord, est-on porté à incriminer l'action de la bile. Or, l'injection du contenu, puisé chez des animaux dont vingt-quatre heures avant on a lié le cholédoque, amène habituellement une mort plus rapide que dans le cas où ce canal est libre. D'ailleurs, après obstruction de ce conduit, les produits intestinaux sont plus riches en microbes, surtout en germes anaérobies, que les matières prélevées aux mêmes points et plus encore dans l'estomac des sujets normaux. Peut-être, cette augmentation de toxicité relève-t-elle de l'intervention de ces ferments figurés plus nombreux et plus actifs, comme le prouve l'examen des différents milieux de culture. Quoi qu'il en soit, ces faits établissent le pouvoir antiseptique de la bile plus nettement que dans le cas où l'on introduit directement ce liquide dans ces milieux de culture. Il est donc permis de rattacher cette action microbicide non seulement aux principes constituants de cette sécrétion, mais aussi aux modifications qu'engendre son arrivée dans le tube digestif, probablement, d'après quelques expériences, au moins en partie, aux acides biliaires mis en liberté.

En dehors des modifications imposées au rythme respiratoire, à l'état du névraxe (troubles sensitifs, moteurs, etc.), aux conditions de la circulation (abaissement de pression, etc.), aux diverses sécrétions digestives, aux mouvements péristaltiques ou à la résistance de l'organisme (début de vaccination), soit par les extraits de la paroi (entéro-protéides de Botazzi), soit par le contenu de cet intestin (Asleben) [1], il était intéressant d'examiner les modifications subies par le sang. Les enseignements de la clinique nous apprennent, en effet, qu'au cours de différentes affections surtout chroniques du foie, de l'estomac, de l'intestin, on enregistre

---

(1) CHARRIN et LE PLAY, *Les poisons intestinaux* (*Comptes rendus,* 10 juillet 1905).

des congestions, des hémorragies, des thromboses, des altérations sanguines variées, etc.

Si, après filtration ou centrifugation, on injecte le contenu du haut de l'intestin, avec Botazzi et Asleben, on note une lenteur parfois légère de la coagulation. — Sans qu'on puisse incriminer directement la bile, cette lenteur s'accentue, quand on mélange 5^{cm^3} de ce liquide à 15^g ou 20^g de matières, surtout si ce mélange est fait quelques heures avant, donnée qui semble impliquer la formation ou la disparition d'un élément spécial. D'un autre côté, à l'exemple de la plupart des tares hépatiques, la ligature du cholédoque tend également, chez l'animal lié, à rendre plus tardive cette coagulation; pourtant, dans un certain nombre de cas, lorsque, après une obstruction de ce cholédoque datant environ de vingt-quatre heures, on introduit dans les veines les principes puisés dans un segment intestinal supérieur, non seulement le sang se thrombose sans retard, mais quelquefois cette thrombose paraît accélérée.

Ajoutons que, si l'état liquide persiste, les globules se déforment, l'hémoglobine diminue. Ajoutons aussi que les composés qui paraissent ralentir cette coagulation sont en majorité thermolabiles, solubles dans l'alcool et dialysables. Remarquons, enfin, que la propriété coagulante appartient à nombre de tissus et, en mettant en jeu un facteur mécanique dans des recherches relatives à l'étude des attributs toxiques des humeurs, cette propriété expose à l'erreur.

En présence des résultats obtenus, il était intéressant de se demander si, en dehors des éléments (composés antagonistes, concurrence vitale, oxygène, acide carbonique, corps ammoniacaux, phénol, diastases, mucus, épithélium, leucocytes, etc.), que nous avons reconnus propres à atténuer les poisons intestinaux, il n'était pas possible de faire naître des anticorps.

Pour la bile, nos essais ont été négatifs; nous avons même constaté que, contre sa propre bile, le lapin n'est pas sensiblement protégé. Cependant, on a soutenu qu'un animal est plus ou moins immunisé contre ses propres poisons; en outre, bien que, si l'on ne change pas d'espèce, les cytotoxines et leurs anticorps se développent malaisément, ces sortes d'auto-injections, conséquences des reprises entéro-hépatiques d'une partie de ce liquide, pouvaient, à la rigueur, permettre de penser que l'augmentation de la résistance à la toxicité biliaire était chose réalisable. Ces résultats sont peut-être dus à ce que les principes biliaires les plus particulièrement toxiques ne sont pas résorbés en suffisante quantité ou sont plus ou moins complètement transformés au cours de ce circulus entéro-hépatique.

Pour le contenu intestinal, des expériences encore insuffisantes permettent d'entrevoir une solution positive.

En définitive, ces recherches mettent en évidence les variations de la

toxicité des produits intestinaux, associés à ceux qui viennent des annexes du tube digestif, du foie et de la muqueuse intestinale. De plus, ces mêmes expériences révèlent en partie le mécanisme et les conditions de ces influences toxiques.

GÉOLOGIE. — *Sur la tectonique du massif de la Dent-Blanche.* Note de M. **Émile Argand**, présentée par M. de Lapparent.

Dans deux Communications précédentes ([1]), mon maître M. Maurice Lugeon et moi avons montré que les Alpes cristallines de la zone du Piémont, entre les vallées du Tessin et de l'Arc, sont formées par l'empilement de très grands plis couchés; nous avons de même établi que le massif de la Dent-Blanche est un lambeau de recouvrement taillé dans le plus élevé de ces plis.

Les progrès de l'exploration m'ont conduit à la découverte, dans ce grand massif de recouvrement, du pli frontal et d'une série de replis très puissants postérieurs à la mise en place de la nappe. Les éléments tectoniques du massif de la Dent-Blanche sont, en allant du bord externe au bord interne :

A. *Le pli frontal*, conservé sur une faible longueur dans l'éperon rocheux de Veisivi (Visivir), au sud d'Evolène. Son importance théorique est considérable; il fournit, en effet, la preuve mécanique du transport vers l'extérieur de la chaîne. La charnière gneissique, reposant sur la série mésozoïque, mesure au moins 1800^{m} d'épaisseur sur la rive droite du val de l'Arolla.

a. Le synclinal du Dolin, renfermant, outre divers niveaux du Trias, des brèches métamorphiques probablement liasiques; ce synclinal, vidé de son contenu mésozoïque, se poursuit dans les puissants contournements gneissiques de la Dent Perroc.

B. *L'anticlinal de la Za*, dont il ne subsiste que le noyau, accompagné de masses considérables du granite à amphibole dit *arkésine*.

Tous ces plis sont énergiquement déversés vers l'extérieur de la chaîne; à ce régime font suite :

b. Le synclinal du mont Collon; la charnière en est visible sur les deux rives du glacier de l'Arolla; le noyau est formé de roches basiques très diverses, surtout massives, englobant des lentilles de calcaires métamorphiques; le tout repose sur un fond de gneiss.

La dépression du glacier de l'Otemma est déterminée par ce synclinal.

C. *L'anticlinal des Bouquetins*, qui se propage vers le Sud-Ouest en formant la chaîne-frontière italo-suisse.

([1]) *Comptes rendus*, 15 et 29 mai 1905.

c. Le synclinal de la Valpelline, formé de roches basiques très variées, accompagnées d'un puissant complexe de micaschistes grenatifères; ces diverses roches, bien étudiées par M. Novarese, renferment d'innombrables lentilles calcaires à tous les stades possibles de métamorphisme. Les formations que la Carte géologique suisse groupe sous le symbole Gl sont, dans la Valpelline, inséparables des roches basiques du type D et remplissent une notable partie du synclinal.

Il y a de très fortes raisons pour attribuer au moins la partie inférieure de ce complexe au Trias. Tout se passe en effet comme si, dans la série stratigraphique normale, telle qu'elle résulte de l'ensemble des données acquises sur la zone du Piémont, les roches basiques s'étaient simplement et en totalité substituées aux schistes lustrés, avec préservation relative des lentilles calcaires du Trias, de tout temps réfractaires au métamorphisme.

D. *L'anticlinal du Faroma,* répondant dans son ensemble à la crête qui sépare la Valpelline du Val Tournanche.

d. Le synclinal du mont Mary, de constitution analogue aux deux précédents.

Et enfin la tranche interne du massif de recouvrement, en repos anormal sur son substratum mésozoïque (fenêtre de Châtillon-Zermatt).

Ces trois derniers plis sont fortement repliés sur eux-mêmes et leur « plan » axial est devenu une surface nettement concave vers le Sud-Est; le déversement principal est vers l'intérieur de la chaîne. En outre, ils intéressent une portion considérable du substratum de la nappe; c'est ainsi que la bande triasique de Roisan-Saint-Barthélemy forme le cœur de l'anticlinal gneissique du Faroma, tandis que, sur le prolongement tectonique des synclinaux de la Valpelline et du mont Mary, on voit le substratum mésozoïque envelopper en faux-synclinaux des noyaux de gneiss (Gignod) ou de micaschistes (Chez Enry), qui ne sont eux-mêmes que la répercussion en profondeur des accidents superficiels de la nappe.

L'échelle de ces phénomènes, comparés à leurs analogues dans les zones externes des Alpes, est d'ailleurs gigantesque. La structure dite en *éventail de plis* est très apparente et la participation du substratum à ces replis montre que la nappe, pendant ou après sa mise en place, a été replissée absolument comme un massif autochtone.

A cette différence près, — et ce n'en est peut-être pas une si l'on veut bien songer que nous ignorons totalement ce qui se passe en profondeur sous l'éventail des Alpes franco-italiennes —, il y a, sinon au point de vue mécanique, du moins au point de vue de la morphologie des surfaces structurales, une indiscutable analogie entre l'éventail précité et celui de la Dent-Blanche. M. Lugeon a depuis longtemps conçu [1] la possibilité de replis postérieurs à déversement interne dans des masses dont le mouvement principal s'est effectué vers l'extérieur et M. Kilian, avec une

---

[1] LUGEON, *La Région de la Brèche du Chablais* (*B. S. C. G. F.*, t. VII, p. 623).

grande sagacité, a fortement insisté sur la généralité de ce type de dislocation dans les Alpes franco-italiennes.

La continuité des surfaces structurales est d'ailleurs parfaite entre la masse de la Dent-Blanche (*sensu stricto*) et celle du mont Mary. Celle-ci ne représente en somme qu'un paquet de replis subordonné à un grand ensemble. Il y a donc lieu d'étendre à la Dent-Blanche les considérations par lesquelles M. Lugeon et moi avons montré que le gneiss Sesia représente la racine de la masse Mary-Emilius. La nappe VI, ou nappe piémontaise supérieure, comprend donc les massifs de la Dent-Blanche, du mont Mary, du mont Emilius avec les lambeaux du Rafrè et du Pillonet; elle va s'enraciner dans la région la plus externe du gneiss Sesia.

Entre toutes ces masses, la continuité n'est interrompue que par l'érosion, et la surface structurale des gneiss ou des micaschistes, supportant les roches basiques et leurs intercalations calcaires, se poursuit indiscutablement jusqu'au bord externe de la zone d'Ivrée, dont la constitution ne fait guère que reproduire en grand les synclinaux du Collon ou de la Valpelline. Les régions moyennes et internes du gneiss Sesia supportent d'ailleurs des témoins étendus de la couverture à facies ivréen, conservés dans des synclinaux qui peuvent être fort aigus. Si l'on veut bien se représenter, non plus seulement en plan ou en coupe, mais *dans l'espace*, le solide complexe formé par la nappe VI, on voit que *les roches basiques du Collon, de la Valpelline et du mont Mary sont les restes, conservés grâce à des replis secondaires, de la partie couchée d'un grand synclinal. La queue de ce synclinal, fréquemment renversée vers l'intérieur de la chaîne, n'est autre que la zone d'Ivrée elle-même.*

Les points que nous avons cités ne sont pas les seuls où l'on puisse observer des restes de la portion couchée du grand synclinal basique.

M. Suess a depuis longtemps pressenti, à propos d'une région un peu plus orientale de la zone du Piémont, cette participation du matériel basique ivréen aux grands phénomènes tangentiels ([1]).

Les inductions du grand maître viennois peuvent aujourd'hui, en ce qui concerne la région dont nous venons de résumer les traits principaux, être appuyées d'un critère stéréométrique dont la rigueur ne laisse rien à désirer.

([1]) E. Suess, *Sur la nature des charriages* (*Comptes rendus*, t. CXXXIX, nov. 1904).

GÉOLOGIE. — *D'Iférouane à Zinder*. Note de M. R. Chudeau, présentée par M. Alfred Giard.

L'Aïr est constitué dans sa partie nord par une pénéplaine silurienne et archéenne à pente légère vers le sud-ouest; une faille au nord d'Aouderas en a surélevé d'une centaine de mètres la partie méridionale. Sur cette plaine sont venus se greffer des accidents éruptifs récents qui constituent tous les reliefs notables de la région. Près d'Iférouane, un filon vertical de granite se rattache au Timgué; c'est, je pense, la roche que Lacroix rapproche des rhyolithes à ægyrine (*Comptes rendus*, janvier 1905). Les montagnes d'Aguellal, l'Agalok, etc., sont certainement volcaniques; les coulées cependant ne deviennent nettes qu'à partir du Bilat et surtout à Aoudéras, soit que les volcans du sud soient plus récents et moins mal conservés que ceux du nord, soit que les phénomènes d'intumescence aient joué le principal rôle dans la région. A partir d'Aoudéras, les manifestations volcaniques disparaissent rapidement.

Le Crétacé commence à 6^{km} environ au nord d'Agadez à Alaghsan, où il débute par un poudingue reposant sur l'Archéen. Son existence est encore certaine à Ouamé à plus de 300^{km} au sud. On peut, je crois, y distinguer trois niveaux définis par leurs caractères lithologiques et leur rôle géographique. A la base, des grès et des argiles violacées forment une grande plaine à vallées, souvent mal indiquées et très larges qui, s'il pleuvait, serait une région de marais. Cette plaine, dépendance du sultanat d'Agadez, ne porte pas de nom d'ensemble et fait encore partie de l'Aïr qui n'est pas une région naturelle. Elle est limitée vers le sud par une falaise haute de 30^m à 50^m, qui décrit un arc de cercle depuis In-Gall jusqu'au massif de Toureget (200^{km}). Le centre en serait à l'ouest d'Aoudéras. A Maraudet j'ai trouvé sur ses flancs des débris de Reptiles et de bois silicifié. Elle est due, je pense, à un accident tectonique en relation avec les volcans d'Aïr.

Le second niveau semble uniquement gréseux; il forme un plateau peu ondulé, couvert de brousse, le Tagama; les arbres ont le plus souvent 2^m à 3^m de hauteur, parfois 5^m et 6^m et sont espacés; sauf dans les dépressions, il n'y en a pas plus d'une cinquantaine à l'hectare. L'année 1905 a été exceptionnellement humide et le sol du Tagama était presque entièrement couvert dans sa partie ouest par la végétation annuelle. Les cours d'eau du Tagama, dirigés vers le sud-ouest, sont jalonnés de mares qui contiennent de l'eau pendant quelques mois; les puits, peu nombreux, sont profonds (Tiou Mousgou, 33^m). La brousse n'est habitée que temporairement par quelques nomades.

Le crétacé se termine par des argiles verdâtres, souvent gypsifères, contenant quelques bancs de grès et de calcaire avec nombreux fossiles (Huîtres et Ammo-

nites); le plus beau gisement est à la falaise de Béréré, où le Dr Heckenroth avait trouvé quelques Ammonites et que les indications du capitaine Lefebvre m'ont permis de retrouver. Ces argiles forment sur le plateau gréseux une série de plateaux peu étendus et peu élevés (30m au plus) protégés par un manteau de latérite. La région qu'elles définissent est la partie riche du Damerghou : les villages y sont nombreux et les cultures de mil importantes. Au sud et séparant le Damerghou du Demagherim le niveau gréseux et la brousse reparaissent.

Vers Ouamé, le pays change d'aspect; il est mamelonné plutôt qu'ondulé et coupé de longues rangées de collines nord-sud; la végétation n'est plus la même; les cultures sont fréquentes. Mais on voit mal le sol : les collines sont formées de quartzites blanches fortement redressées avec filons de quartz (Silurien?); quelques mamelons montrent à leur sommet des blocs de granite. Je ne sais pas si le crétacé pénètre profondément dans le pays; en tous cas, aussi bien au nord qu'au sud, j'ai pu voir nettement le caractère atlantique des côtes de la mer crétacée, dont la direction générale coupe presque à angle droit les plissements des terrains anciens.

Un trait notable de toute la région traversée est l'indécision et le caractère inachevé du réseau hydrographique : le Teloua a une pente rapide et des berges accusées; ses affluents sont des marais; les rivières de Tagama et du Damerghou sont des chapelets de mares et d'étangs. En Finlande et au Canada, l'érosion a commencé trop tard; ici elle a cessé trop tôt, mais les résultats sont comparables. Ce qui peut faire croire à première vue à une érosion profonde est tout simplement la dénudation éolienne, conséquence de la sécheresse : presque nulle part la terre végétale ne vient adoucir les formes topographiques.

La séance est levée à 4 heures et quart.

G. D.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans la séance du 12 février 1906.
(Suite.)

The Nautical Almanac and astronomical ephemeris for the year 1909, for the meridian of the Royal Observatory at Greenwich, pub. by order of the Lords Commissioners of the Admiralty. Edimbourg, 1905; 1 vol. in-8°.

Lehrbuch der vergleichenden mikroskopischen Anatomie, herausgegeb. v.

Dr Med. ALBERT OPPELL; Teil VI : *Atmungsapparat*, v. A. OPPELL. Iéna, Gustav Fischer, 1905; 1 vol. in-8°. (Hommage de l'auteur.)

Ueber chitinöse Fortbewegungs-Apparate einiger (insbesondere fussloser) Insektenlarven, von Dr WILHELM LISEWITZ. Munich, E. Reinhardt, 1906; 1 fasc. in-8°. (Hommage de l'auteur.)

Welche Vorzüge bietet die Generator-Gasfeuerung gegenüber der direkten Feuerung an Beispielen aus der Praxis allgemeinverständlich erlaüert, von ERNST SCHMATOLLA. Berlin, A. Seydel, s. d; 1 fasc. in-8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles; IIIe année, 4e période, t. XXI, n° 1, 15 janvier 1906. Genève; 1 fasc. in-8°.

Annalen der Physik, herausgegeb. v. PAUL DRUDE, Folge IV, Bd. XIX, Heft 1. Leipzig, Johann Ambrosius Barth; 1906; 1 fasc. in-8°.

Beiblätter zu den Annalen der Physik, herausgegeb. v. WALTER KÖNIG; Bd. XXX, Heft 1, 1906. Leipzig, Johann Ambrosius Barth; 1 fasc. in-8°.

The journal of the American Chemical Society; vol. XXVIII, n° 1, january 1906. Easton, Pa.; 1 vol. in-8°.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft, Jahrgang XXXIX, n° 1, 1906. Berlin; 1 vol. in-8°.

Memorias y revista de la Sociedad cientifica Antonio Alzate, pub. bajo la dirección de RAFAEL AGUILAR Y SANTILLAN; Tomo XXII, nos 1-6, enero-junio de 1905. Mexico; 1 vol. in-8°.